

Institut for matematiske fag
Københavns Universitet



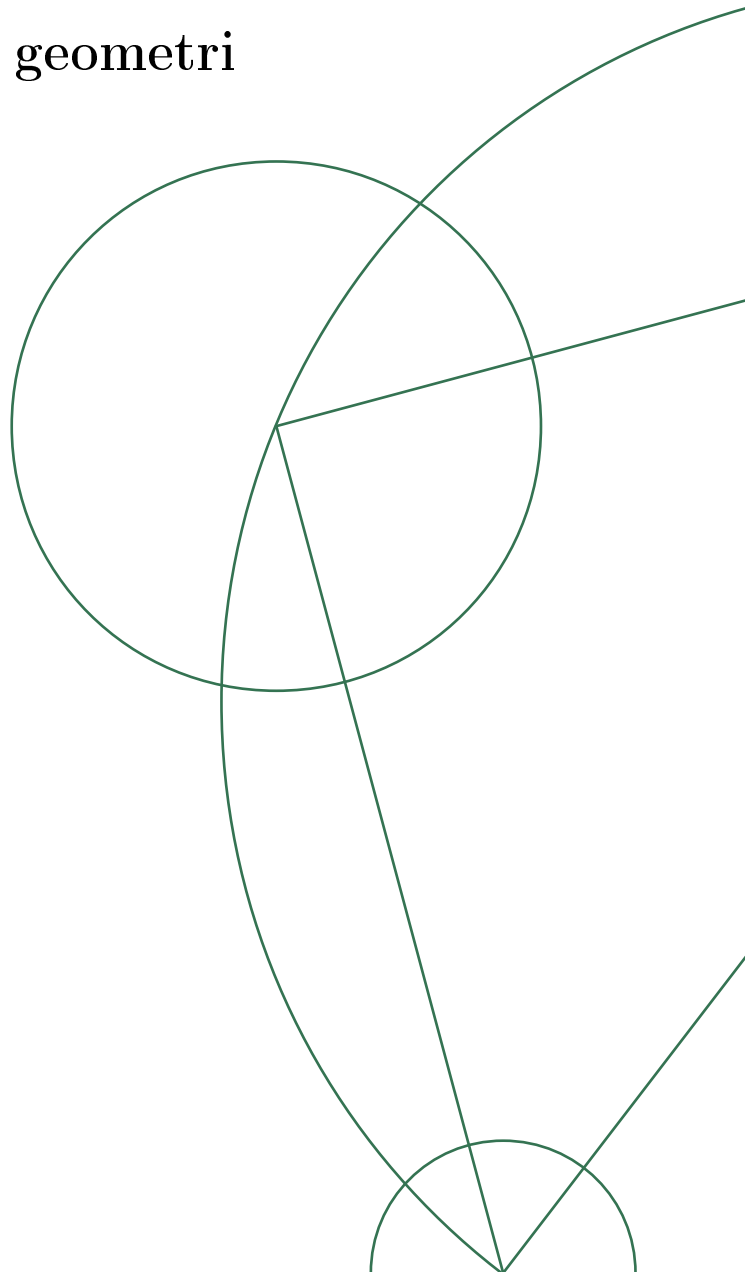
11. juni, 2010

Euklidisk og ikke-euklidisk geometri

Christina Slaatorn

Bachelorprojekt i matematik

Vejleder: Nathalie Wahl



Resumé	ii
Introduktion	iii
1 Euklids postulater	1
2 Euklidisk, sfærisk og hyperbolsk geometri	4
2.1 Metriske rum	4
2.1.1 Euklidisk n -rum	4
2.1.2 Sfærisk n -rum	5
2.1.3 Hyperbolsk n -rum	7
2.2 Geodæter	11
2.2.1 E^n	11
2.2.2 S^n	11
2.2.3 P^n	13
2.2.4 H^n	14
2.3 Trigonometri	14
2.3.1 Sfærisk trigonometri	14
2.3.2 Hyperbolsk trigonometri	17
3 Moderne tolkning af Euklids aksiomer	23
4 Konstruktion af euklidiske, hyperbolske og sfæriske flader	25
5 Lukkede flader	33
5.1 Klassificering af lukkede flader	33
5.2 Gauss-Bonnets sætning	35

This thesis will, with a historical aspect, give a wide introduction to Euclidean and non-Euclidean geometry. Starting with Euclids more than 2000 year old axiomatic system for the planar geometry, we will see how changing a single axiom, will lead to new abstract geometries.

In chapter one we will have a short look at the history behind the discovery of non-Euclidean geometries, and in chapter two look at the construction of them, and their characteristics. This chapter will be fundamental, and is built up such that the duality between spherical and hyperbolic geometries is emphasized.

After this chapter it will make sense to talk about angles and straight lines on curved surfaces, and in that way be possible to modernize and generalize Euclid's axioms, so we can use them today.

The last two chapters will require some basic topological understanding, and gives a method to construct Euclidean, spherical, and hyperbolic surfaces, and to distinguish topologically different surfaces. We will also take a look at the relation between the topology and geometry of closed surfaces, and among other things show the Gauss-Bonnet Theorem.

Resumé på dansk (Abstract in Danish)

Dette bachelorprojekt vil, med et historisk aspekt, give en bred introduktion til euklidisk og ikke-euklidisk geometri. Men udgangspunkt i Euklids over 2000 år gamle aksiomssystem for plangeometrien, vil vi se hvordan en ændring af et enkelt aksiom, vil lede til nye og abstrakte geometrier.

Efter vi i kapitel et, kort ser på historien bag opdagelsen af ikke-euklidiske geometrier, vil vi i kapitel to beskæftige os med opbygningen af dem, og egenskaber ved dem. Dette kapitel vil være grundlæggende, og er opbygget, så dualiteten mellem sfæriske og hyperbolske geometrier fremhæves.

Efter dette kapitel vil det give mening at snakke om vinkler og rette linier på krumme flader, og på den måde blive muligt at modernisere og generalisere Euklids aksiomer, så vi også kan bruge dem i dag.

De sidste to kapitler kræver en smule topologisk forståelse, og giver en metode til at konstruere euklidiske, sfæriske og hyperbolske flader, samt at skelne mellem topologisk forskellige flader. Vi vil også se på sammenhængen mellem lukkede fladers geometri og topologi, og blandt andet vise Gauss-Bonnets sætning.

Geometri er en af de ældste videnskaber, og Euklids 'Elementer' er et af de værker, der har betydet mest inden for faget. Disse bøger, fra omkring år 300 f.kr., udviklede matematikken, og kom til at danne basis for studiet af geometri i mere end 2000 år efter de blev skrevet.

Men matematikken udvikles fortsat, og i dag vil vi knapt nok betragte Euklids værker, som værende rigtig matematik.

Da Euklid begyndte at skrive matematikken op som aksiomer og deduktive sætninger, var det en meget ny måde at se matematikken og geometrien på. Matematiske sætninger fik ny sandhedsværdi, når de pludselig skulle bevises sande og ikke bare menes at være det.

Indførelsen af bevisførelse var såvel et meget stort og vigtigt skridt i matematikken, men vil man snakke om en disideret revolution, bliver det nærmere, da man 2000 år efter opdagede ikke-euklidisk geometri.

Da man her indså, at der logisk set fandtes andre geometrier end den euklidiske, ændredes geometriens rolle sig fra at være en naturbeskrivelse til at være en abstrakt teori.

Euklid var altså med til at ændre synet på matematikken, men opdagelsen af ikke euklidisk-geometri var med til at ændre hele matematikkens karakter.

Men opdagelsen af de nye geometrier skabte ikke udelukkende forvirring over hvordan naturen opførte sig, det skabte også en nødvendig baggrund for idéer som relativitetsteorien. I dag er vores bedste bud på en ret linie en lysstråle, og disse har vist sig at opføre sig efter ikke-euklidisk geometri.

Kun i svage tyngdefelter som Jordens, er geometrien tilnærmelsesvist euklidisk.

I første kapitel af dette projekt vil vi kigge på Euklids berømte fem postulater, og kort forklare historien bag opdagelsen af ikke-euklidisk geometri.

Det skal siges at det 1. postulat her er formuleret; 'der kan trækkes en ret linie mellem et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst andet punkt' og ikke at der kan trækkes en *entydig* ret linie mellem et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst andet punkt.

Hvad den sande formulering var, ved kun dem der kan græsk, så vi andre må vælge hvilke oversættelse vi tror på. Her har vi valgt formuleringen fra kilde [JR], da dette gør at sfærisk geometri og ikke bare elliptisk, kan ses som at opfylde postulatet.

Hvordan det overhovedet bliver muligt at snakke om rette linier på krumme flader, ser vi på i kapitel to, hvor euklidisk, sfærisk og hyperbolsk n -rum bliver introduceret. Her vil vi også se på sfærisk og hyperbolsk trigonometri og vise at sfæriske, euklidiske og hyperbolske trekanter har en vinkelsum,

som er henholdsvis større, lig eller mindre end 180 grader.

Alt dette giver os den nødvendige baggrund til at vi i kapitel tre kan snakke om en moderne måde at opfatte Euklids postulater på. Dette kapitel er kort og ikke så informativt, men giver et godt indblik i, hvordan måden at lave matematik på har ændret sig siden Euklids tid.

Dette efterfølges i kapitel fire, af en interessant sætning, der giver en metode til at konstruere euklidiske, sfæriske og hyperbolske flader. Beviset er lidt langt og teknisk, og det er dette, der gennem kapitlet vil blive bygget op til at kunne gennemføres.

I det sidste kapitel ser vi på kompakte flader og starter med at klassificere dem ud fra deres antal af topologiske huller og deres orienterbarhed. Disse topologiske egenskaber vil vi så i sidste halvdel af kapitlet, forene med den geometriske viden, vi får fra kapitel to, og vise at der er en sammenhæng mellem en flades topologiske og geometriske egenskaber.

Det er hovedsageligt bogen 'Foundations of hyperbolic manifolds' af John G. Ratcliffe, der er brugt gennem projektet. I første kapitel, med det historiske aspekt, er der dog også kigget i de første kapitler af de øvrige kilder angivet i kildelisten.

Euklids postulater

Euklid var, så vidt man ved, den første til at stille et aksiomssystem op for plangeometri. Fra at være læren om tegninger i sandet (geometri betyder jordopmåling), blev geometri til en deduktiv videnskab, der gik ud fra nogle få aksiomer.

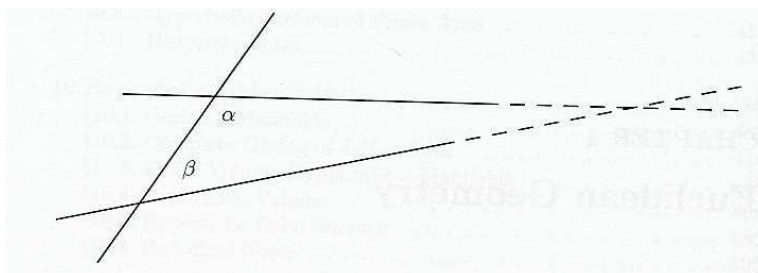
Euklid havde dog en helt anden opfattelse af aksiomer, end den vi har i dag. Aksiomerne skulle være de indlysende sandheder om virkeligheden, som ikke behøvede bevis - ikke som i dag hvor et aksiomssystem kan være et hvilket som helst abstrakt grundlag, som ikke er vist inkonsistent.

Euklids "Elementer", var navnet på de intet mindre end 13 meget systematisk og udførligt skrevne bøger, som Euklid skrev omkring år 300 f.kr. Den første bog starter med 23 definitioner og ti aksiomer, hvoraf de første fem aksiomer også kaldes postulater. Disse fem skulle være Euklids bedste bud på grundlæggende, sande sætninger om plangeometrien. De efterfølgende fem aksiomer var i højere grad generelle sætninger, der mentes at gælde i al videnskab.

Resten af første bog, samt de 12 andre bøger, består så af mange hundrede geometriske sætninger, der udledes fra disse få aksiomer.

Det er de fem postulater, og især det sidste af dem, som vi vil beskæftige os med i dette projekt. De er:

1. Der kan trækkes en ret linie mellem hvilket som helst punkt til hvilket som helst andet punkt.
2. En endelig ret linie, kan forlænges ud i en uendelig ret linie.
3. En cirkel kan tegnes med en hvilken som helst radius og et hvilket som helst centrum.
4. Alle rette vinkler er ens.
5. Hvis en ret linie skærer to rette linier, og de indvendige vinkler på samme side er mindre end end to rette, så vil linierne, når de forlænges ubegrænset, mødes på denne side.



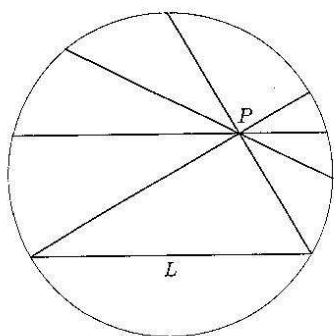
Det 5. postulat skiller sig ud ved at være meget længere og mere indviklet end de andre. At to linier mødes i det uendelige, virker ikke ligefrem som en selvindlysende sandhed, men mere som en sætning med brug for bevis. Dette har Euklid formodentlig selv været klar over - han har i hvert fald undladt at bruge det i de første 28 beviser i sine bøger, selvom det kunne have gjort beviserne nemmere og enklere. Det kan tænkes at han har håbet på at kunne finde et enklere, mere overbevisende alternativ, eller helt at kunne undvære det 5. postulat.

Aksiomet var da også kritiseret fra start af, og mange var overbevist om at det kunne vises ud fra de forrige fire. Dette lykkedes dog ingen, og i dag ved vi også at det ikke er muligt. Først i løbet af det 19. århundrede (1823-1825) gik det op for flere matematikere, uafhængigt af hinanden, at det 5. postulat var uafhængigt af de andre. Ved at antage at det 5. postulat ikke gjaldt, viste det sig nemlig at man kom frem til en anden konsistent geometri. De første til at offentliggøre dette var russeren N.I.Lobatjevskij (1793-1865) og ungareren Bolyai János (1802-1860). Gauss skal efter sigende have opdaget dette tidligere, men uden af udgive det.

Ækvivalent med det 5. postulat, er at der gennem ethvert punkt, P , uden for en ret linie, L , eksisterer netop en linie parallel med L gennem P . Antages det 5. postulat ikke at gælde, får vi altså at der gennem et punkt uden for en linie enten er mere end en eller ingen linier parallelle med linien. De geometrier vi får, når det 5. postulat negeres, er de ikke-euklidiske. De er delt op i de hyperbolske og sfæriske geometrier, hvor parallelaksiomet er henholdsvis, at der ingen parallelle linier er uden for en given linie, og at der er uendelig mange.

I 1868 lykkedes det en italiensk matematiker, ved navn Eugenio Beltrami, at lave en euklidisk model af den hyperbolske plan, og dermed udrydde alt tvivl om hvorvidt det 5. postulat var afhængigt af de andre fire. I hans model gjaldt de fire første af Euklids postulater, men ikke det 5. Dermed var det også bevist, at hvis euklidisk geometri var konsistent, så var hyperbolsk også.

Hans model kaldes også den 'projektive diskmodel' af den hyperbolske plan, og består af punkterne inde i en euklidisk disk. Modellens rette linier er korderne til disken, og de svarer altså til euklidiske rette linier. For en linie, L , i modellen, vil der være uendelig mange parallelle linier til L gennem et punkt P udenfor L .



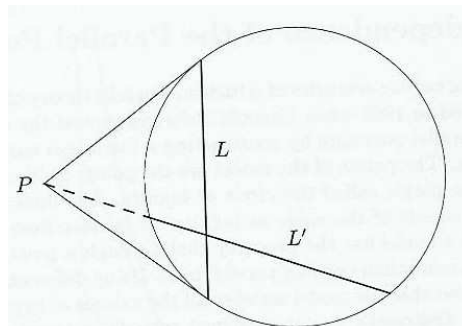
Figur 1.1:

Dette ses nemmest ved at forestille sig de to linier, der går gennem P og ned til hvert af de steder på randen, hvor L rammer. Begge linier vil være parallelle med L , da de aldrig skærer denne. Deruover vil alle linierne imellem disse to også være parallelle med L - altså uendeligt mange. På figur 1.1 ses fire linier gennem P , som er parallelle med L .

Ulempen med modellen er at vinkler og længder er defineret anderledes end de euklidiske, for at det var muligt at få de fire første postulater opfyldt.

Hvis L går gennem diskens centrum, vil de linier der står vinkelret på den, være de samme som dem i euklidisk geometri.

Går L derimod ikke gennem centrum, skal vi se på tangenterne til disken i L 's endepunkter, for at finde rette vinkler. De linier, der står vinkelret på L , er så dem, der forlænget ud af cirklen, går gennem disse tangenters skæringspunkt. Se figur 1.2. Her vil det altså kun være vinklen i L 's midterpunkt, som svarer til en euklidisk ret vinkel.



Figur 1.2: To vinkelrette linier, L' og L , i den projektive diskmodel.

Andre euklidiske modeller af den hyperbolske plan er også lavet, og det er også muligt at have en model, der bevarer de euklidiske vinkler. Men så må man til gengæld give afkald på noget andet, for eksempel at de rette linier i modellen svarer til de euklidiske. Hvad det er lykkedes at vise for den tyske matematiker David Hilbert (1862-1943), er nemlig at der ikke findes en model af hele den hyperbolske plan, som en flade i et euklidisk rum, som bevarer både vinkler og afstande.

Sfærisk geometri derimod, har en kugleflade i et euklidisk rum, som en naturlig model. Denne bevarer både afstande og vinkler langs fladens rette linier - Altså kurvestykker der angiver de korteste veje mellem punkter. Sfærisk geometri er altså også konsistent hvis euklidisk er.

Som vi vil se i næste kapitel, kan det dog godt lade sig gøre at have en afstandsbevarende model af den hyperbolske plan i \mathbb{R}^3 - vi skal bare have udstyret det med et andet indre produkt først.

2.1 Metriske rum

For at kunne snakke om geometri i et rum, bliver man nød til at have et begreb om hvad afstande og vinkler er.

Definition 2.1 (Metrik). Lad X være en ikke-tom mængde. En funktion, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, er så en metrik på X , hvis der for vilkårlige elementer x , y og z i X gælder følgende:

- $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(x, y)$.

Et rum udstyret med en metrik, kaldes et metrisk rum.

Definition 2.2 (Similaritet). Lad X, Y være metriske rum og $\varphi: X \rightarrow Y$. Så er φ en similaritet, hvis den er bijektiv, og den opfylder: $d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) = k \cdot d_X(x, y)$, for et $k \in \mathbb{R}_+$ og for alle $x, y \in X$.

To metriske rum siges at være similære, hvis der findes en similaritet imellem dem.

Er $k = 1$ er φ en afstandsbevarende funktion, og kaldes så en isometri

2.1.1 Euklidisk n -rum

Standardmodellen der bruges for at analysere n -dimensionel euklidisk geometri, er som bekendt \mathbb{R}^n . Den kan udstyres med det sædvanlige indre produkt, $\langle x, y \rangle_E = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, og den euklidiske norm; $\|x\|_E = \langle x, x \rangle_E^{\frac{1}{2}}$.

Krydsproduktet mellem to vektorer $x, y \in \mathbb{R}^3$ er givet ved;

$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$. Det ses altså at krydsproduktet er 0, hvis de to vektorer er afhængige. Derudover har krydsproduktet følgende nyttige egenskaber, som vi dog ikke vil bruge tid på at vise her:

Sætning 2.3. Lad $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$

(1) $x \times y = -y \times x.$

(2) $\langle x \times y, z \rangle_E = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$

(3) $(x \times y) \times z = \langle x, z \rangle_E y - \langle y, z \rangle_E x.$

(4) $\langle x \times y, z \times w \rangle_E = \langle y, w \rangle_E \langle x, z \rangle_E - \langle x, w \rangle_E \langle y, z \rangle_E$ og dermed også $\|x \times y\|_E^2 = \langle x \times y, x \times y \rangle_E = \|x\|_E^2 \|y\|_E^2 - \langle x, y \rangle_E^2.$

Fra (2) ser vi yderligere, at

$$\langle x \times y, z \rangle_E = \langle y \times z, x \rangle_E = \langle z \times x, y \rangle_E$$

Fra (2) kan vi så også konkludere, at $x \times y$ står vinkelret på både x og y , da

$$\langle x \times y, x \rangle_E = \langle x \times x, y \rangle_E = 0 \text{ og } \langle x \times y, y \rangle_E = \langle y \times y, x \rangle_E = 0.$$

Sætning 2.4 (Cauchy-Schwarz' ulighed). For vektorer $x, y \in \mathbb{R}^n$, gælder at $|\langle x, y \rangle_E| \leq \|x\|_E \|y\|_E$. Der er lighedstegn hvis og kun hvis x og y er lineært afhængige.

Vinklen mellem to vektorer, $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, vil vi kalde $\theta(x, y)$, og definere den til at være det entydige bestemte tal i intervallet $[0, \pi]$, som opfylder ligningen:

$$\langle x, y \rangle_E = \|x\|_E \|y\|_E \cos \theta(x, y).$$

Fra denne definition får vi også, ved brug af sætning 2.3 (4), at

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta(x, y) &= 1 - \cos^2 \theta(x, y) = 1 - \frac{\langle x, y \rangle_E^2}{\|x\|_E^2 \|y\|_E^2} = 1 - \frac{\|x\|_E^2 \|y\|_E^2 - \|x \times y\|_E^2}{\|x\|_E^2 \|y\|_E^2} \\ &= \frac{\|x \times y\|_E^2}{\|x\|_E^2 \|y\|_E^2}. \end{aligned}$$

Vektoren $x \times y$ må have positiv norm, da den står vinkelret på to vektorer med imaginær norm. Da $\sin \theta(x, y)$ også er positiv for $0 \leq \theta \leq \pi$, har vi formelen: $\|x\|_E^2 \|y\|_E^2 \sin^2 \theta(x, y) = \|x \times y\|_E^2.$

Hvis vi lader en funktion, $d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, være defineret ved $d_E(x, y) = \|x - y\|_E$, vil den være en metrik på \mathbb{R}^n . Når vi udstyrer \mathbb{R}^n med metrikken d_E kalder vi det det euklidiske rum af dimension n eller bare E^n .

2.1.2 Sfærisk n -rum

Modsat euklidisk geometri, er sfærisk ikke én, men mange geometrier. De opfylder dog det samme parallelaksiom og er alle similære.

En sfærisk geometri kan skelnes fra andre sfæriske geometrier ved hjælp af Gausskrumningen.

Hvis en sfære har radius r , har den en konstant positiv Gausskrumning på $\frac{1}{r^2}$. Alle sfæriske geometrier, på kugler med samme radius er altså ækvivalente, og ved en skalaændring er alle sfæriske geometrier ækvivalente.

2.1 Metriske rum

For nemhedens skyld vil vi bruge enhedskugleskallen, S^n , som model, når vi skal se på n -dimensionel sfærisk geometri. Denne er en del af \mathbb{R}^{n+1} , og er defineret som:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_E = 1\}.$$

Selvom S^n er en del af \mathbb{R}^{n+1} og vi kan bruge den euklidiske norm, vil vi alligevel definere en anden, mere hensigtsmæssig måde, at beskrive afstande på.

Hvis x og y er to vektorer i S^n , vil vi definere den sfæriske afstand mellem dem, til at være den euklidiske vinkel imellem dem:

$$d_S(x, y) = \theta(x, y), \quad 0 \leq d_S(x, y) \leq \pi.$$

Vi vil se at d_S er en metrik på S^n , men først skal vi have defineret hvad en ortogonal transformation er.

Definition 2.5 (Ortogonal transformation). En *ortogonal transformation*, er en funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, som for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ opfylder at:

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_E = \langle x, y \rangle_E.$$

At det indre produkt bevares, betyder også at den euklidiske norm bevares, og dermed bevares den sfæriske afstand.

En reel, $n \times n$ matrix, siges så at være ortogonal, hvis den lineære transformation, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ defineret ved $A(x) = Ax$, er en ortogonal transformation.

Gruppen som består af de ortogonale matricer sammen med matrixmultiplikation kalder vi den ortogonale gruppe, $O(n)$.

Følgende sætning om ortogonale transformationer vil vi ikke vise her, men man kan se [JR] s. 18, hvis man ønsker bevis.

Sætning 2.6. *For enhver dimension, $m \leq n$, vil den naturlige virkning af $O(n)$ på mængden af m -dimensionelle vektor-underrum af \mathbb{R}^n , være transitiv.*

Sætning 2.7 (d_s er en metrik på S^n).

Bevis: d_S er allerede defineret positiv og det er klart at $d_S(x, y) = 0$ hvis og kun hvis $x = y$ og at $d_S(x, y) = d_S(y, x)$. Vi skal altså bare have vist trekantsuligheden.

Hvis vi lader $x, y, z \in S^n$, vil disse tre vektorer udspænde et underrum af \mathbb{R}^{n+1} af dimension højst tre. Sætning 2.6 giver at der findes en transformation, så de ligger i underrummet af \mathbb{R}^{n+1} udspændt af standardbasisvektorerne; e_1, e_2, e_3 . Vi kan altså betragte x, y, z som værende vektorer i \mathbb{R}^3 .

Ved at benytte reglerne i sætning 2.3 samt sætning 2.4 får vi:

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta(x, y) + \theta(y, z)) &= \cos \theta(x, y) \cos \theta(y, z) - \sin \theta(x, y) \sin \theta(y, z) \\
 &= \langle x, y \rangle_E \langle y, z \rangle_E - \|x \times y\|_E \|y \times z\|_E \\
 &\leq \langle x, y \rangle_E \langle y, z \rangle_E - \langle x \times y, y \times z \rangle_E \\
 &= \langle x, y \rangle_E \langle y, z \rangle_E - (\langle x, y \rangle_E \langle y, z \rangle_E - \langle x, z \rangle_E \langle y, y \rangle_E) \\
 &= \langle x, z \rangle_E \|y\|_E^2 = \langle x, z \rangle_E \\
 &= \cos \theta(x, z).
 \end{aligned}$$

Da \cos er en aftagende funktion i intervallet $[0, \pi]$ giver dette $\theta(x, y) + \theta(y, z) \geq \theta(x, z)$. □

Bemærkning 2.8. Gælder der lighedstegn i trekantsuligheden, må

$\langle x \times y, y \times z \rangle_E = \|x \times y\|_E \|y \times z\|_E$, som ifølge sætning 2.4, betyder at $x \times y$ og $y \times z$ er lineært afhængige. Det vil altså sige, at $(x \times y) \times (y \times z) = 0$, og kombineret med sætning 2.3 (3), at $0 = (x \times y) \times (y \times z) = \langle x, y \times z \rangle_E y - \langle y, y \times z \rangle_E x = \langle x, y \times z \rangle_E y$. Vi har altså at x står vinkelret på $y \times z$, og da y og z også gør dette, må det være ensbetydende med at x , y og z er lineært afhængige. Så vi har at $\theta(x, y) + \theta(y, z) = \theta(x, z)$ hvis og kun hvis x , y og z ligger i et 2-dimensionelt underrum af \mathbb{R}^{n+1} .

S^n sammen med den sfæriske metrik, d_s , kalder vi sfærisk n -rum.

2.1.3 Hyperbolsk n -rum

Som med sfærisk geometri er hyperbolsk geometri ikke én, men mange geometrier, som kan skelnes ved hjælp af Gausskrumning. En plan med konstant negativ krumning er en hyperbolsk plan, og har to planer den samme krumning er de ækvivalente. Som med sfærisk geometri er alle hyperbolske geometrier ækvivalente ved en ændring af skala.

Som vores model til at studere hyperbolsk geometri, vil vi bruge planen med konstant krumning på -1 .

Da sfæren har en konstant krumning på $\frac{1}{r^2}$, er det oplagt at tænke på den hyperbolske plan, som en kugle med imaginær radius.

Vi bliver nød til at definere et nyt indre produkt, hvis imaginære længder skal være mulige. Dette kalder vi det hyperbolske indre produkt, og for to vektorer $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, definerer vi det til: $\langle x, y \rangle_H = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

Den hyperbolske norm er så det komplekse tal: $\|x\|_H = \langle x, x \rangle_H^{\frac{1}{2}}$. Altså enten et positivt eller imæginært positivt tal.

Lad $x = (x_1, \dots, x_n)$ være en vektor i \mathbb{R}^n , så definerer vi \bar{x} til at være vektoren $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Så ser vi at

$$\|x\|_H^2 = -x_1^2 + \|\bar{x}\|_E^2 \quad \text{og} \quad \langle x, y \rangle_H = -x_1 y_1 + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_E$$

2.1 Metriske rum

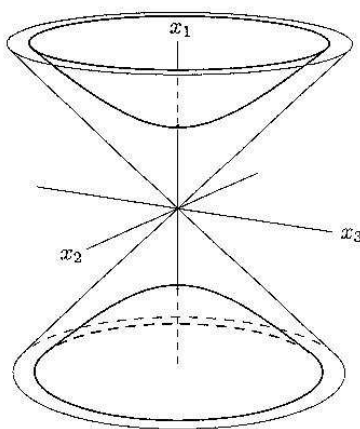
Lad os betragte kuglen med imaginær enhedsradius, altså mængden:

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_H^2 = -1\}.$$

Som det også ses på figur 2.1 er denne mængde ikke sammenhængende, og vi er derfor interesserede i at smide den negative halvdel væk, altså hvor $x_1 < 0$. Vi ender så med en model for det hyperbolske rum af dimension n , som vi vil kalde H^n :

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_H^2 = -1, x_1 > 0\}.$$

Figur 2.1: \mathbb{R}^3 , hvor vektorer med hyperbolsk norm 0, samt kuglen med radius -1 er indtegnet.



Som vi ser, er $\|x\|_H = i$ for $x \in H^n$.

Definition 2.9 (Hyperbolsk transformation). En *hyperbolsk transformation*, er en funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, som for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ opfylder at:

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_H = \langle x, y \rangle_H.$$

En reel, $n \times n$ matrix, siges så at være hyperbolsk, hvis den lineære transformation, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ defineret ved $A(x) = Ax$, er en hyperbolsk transformation.

Gruppen som består af de hyperbolske matricer sammen med matrixmultiplikation kalder vi den hyperbolske gruppe. Vi kalder en vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ positiv, hvis den opfylder at $\|x\|_H$ er imaginær og $x_1 > 0$. Da alle vektorer i H^n er positive, vil vi nøjes med at beskæftige os med den del af gruppen, som transformerer positive vektorer til positive vektorer. Denne del kalder vi den positive, hyperbolske gruppe, $PH(n)$.

Sætning 2.10. For enhver dimension, $m \leq n$, vil den naturlige virkning af $PH(n)$ på mængden af m -dimensionelle positive vektor-underrum af \mathbb{R}^n , være transitiv.

Vi vil ikke vise sætningen her, men man kan se [JR] s. 59, hvis man ønsker bevis.

Sætning 2.11. Lad $x, y \in H^n$, så er $\langle x, y \rangle_H \leq \|x\|_H \|y\|_H$. Lighedstegn gælder hvis og kun hvis x og y er lineært afhængige - altså ens.

Bevis: Alle vektorer i H^n er positive, så vi ved fra sætning 2.10, at der findes en matrix, $A \in PH(n)$, så $Ax = x_1 e_1$, hvor $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Da A er hyperbolsk, er $\langle x, y \rangle_H = \langle Ax, Ay \rangle_H$ og de hyperbolske normer af x og y er bevaret. Derfor kan vi erstatte Ax og Ay med x og y , og dermed antage at $x = x_1 e_1$. Så vil \bar{x} være nulvektoren og $\|\bar{x}\|_E^2 = 0$.

Dette giver følgende:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_H^2 &= (-x_1 y_1 + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_E)^2 = (-x_1 y_1)^2 + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_E^2 - 2x_1 y_1 \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_E = (-x_1 y_1)^2 \\ &\geq x_1^2 y_1^2 - x_1^2 \|\bar{y}\|_E^2 = -x_1^2 (-y_1^2 + \|\bar{y}\|_E^2) = \|x\|_H^2 \|y\|_H^2. \end{aligned}$$

Der gælder kun lighedstegn hvis $\bar{y} = 0$, altså hvis også $y = y_1 e_1$, og det betyder at x og y er afhængige. Tager vi kvadratroden på begge sider, skal vi huske at $\|x\|_H$ og $\|y\|_H$ er positivt imaginære. Vi får dermed at $\langle x, y \rangle_H \leq \|x\|_H \|y\|_H$. Hvor lighedstegn gælder hvis og kun hvis x og y er lineært afhængige. \square

Da $\|x\|_H \|y\|_H < 0$, er $\frac{\langle x, y \rangle_H}{\|x\|_H \|y\|_H} \geq 1$.

Så vil vi definere vinklen mellem to vektorer, $x, y \in H^n$, til at være det entydige, reelle tal, $\eta(x, y) \geq 0$, som opfylder:

$$\langle x, y \rangle_H = \|x\|_H \|y\|_H \cosh \eta(x, y)$$

Fra sætning 2.11 har vi at x og y er lineært afhængige hvis og kun hvis $\cosh \eta(x, y) = 1$ og dermed $\eta(x, y) = 0$.

Tilsvarende den sfæriske metrik, vil vi definere den hyperbolske afstand mellem $x, y \in H^n$ til at være den hyperbolske vinkel imellem dem. Vi vil vise at $d_H(x, y) = \eta(x, y)$ er en metrik på H^n , men først skal vi lige have sat et nyt krydsprodukt på plads.

For at der er den samme sammenhæng mellem indre produkt og krydsprodukt, som i S^2 , bliver vi nødt til at definere et nyt krydsprodukt mellem to vektorer i \mathbb{R}^3 . Det vil vi kalde det hyperbolske krydsprodukt, og betegne $x \otimes y$.

For to vektorer $x, y \in \mathbb{R}^3$, definerer vi det hyperbolske krydsprodukt mellem dem til at være

$$x \otimes y = J(x \times y), \text{ hvor } J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemærkning 2.12. Med omvendt fortegn i (3) og (4), gælder sætning 2.3 også, hvis hyperbolsk indre produkt og krydsprodukt sættes ind i stedet for euklidisk indre produkt og normalt krydsprodukt med.

Sætning 2.13 (d_H er en metrik på H^n).

Bevis: d_H er allerede defineret positiv, og at $d_H(x, y) = 0$ hvis og kun hvis $x = y$ følger af sætning 2.11. Det er klart at $d_H(x, y) = d_H(y, x)$, så der er bare trekantsuligheden tilbage at vise.

Hvis vi lader $x, y, z \in H^n$, vil disse tre vektorer udspænde et underrum af \mathbb{R}^{n+1} af dimension højst

2.1 Metriske rum

tre. Sætning 2.10 giver at der findes en transformation, som kan dreje vektorerne, så de ligger i under-rummet $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, udspændt af standardbasisvektorerne; e_1, e_2, e_3 . Da transformationen bevarer hyperbolsk indre produkt, vil den også bevare hyperbolsk norm og dermed hyperbolsk afstand.

For to vektorer $x, y \in \mathbb{R}^3$, får vi fra bemærkning 2.12, at der gælder:

$$\begin{aligned} \|x \otimes y\|_H^2 &= \langle x \otimes y, x \otimes y \rangle_H = \langle x, y \rangle_H \langle y, x \rangle_H - \langle y, y \rangle_H \langle x, x \rangle_H = \langle x, y \rangle_H^2 - \|x\|_H^2 \|y\|_H^2 \\ &= \|x\|_H^2 \|y\|_H^2 \cosh^2 \eta(x, y) - \|x\|_H^2 \|y\|_H^2 = \|x\|_H^2 \|y\|_H^2 \sinh^2 \eta(x, y). \end{aligned}$$

$x \otimes y$ må have positiv norm, da den står vinkelret på de to positive vektorer x og y .

Da $x, y, z \in H^n$ har norm i , og som vi så, kan betragtes som vektorer i \mathbb{R}^3 , har vi at

$$\|x \otimes y\|_H = \sinh \eta(x, y) \quad \text{og} \quad \|y \otimes z\|_H = \sinh \eta(y, z),$$

da $\|x \otimes y\|_H$ og $\sinh \eta(x, y)$ begge er positive.

Vektoren $(x \otimes y) \otimes (y \otimes z)$ står vinkelret på både $x \otimes y$ og $y \otimes z$ ligesom y gør. Derfor må den enten være 0-vektoren eller være lineært afhængig med y - altså have imaginær norm. Dette giver os ved brug af bemærkning 2.12:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \|(x \otimes y) \otimes (y \otimes z)\|_H^2 = \langle x \otimes y, y \otimes z \rangle_H^2 - \|x \otimes y\|_H^2 \|y \otimes z\|_H^2 \\ &\Rightarrow \langle x \otimes y, y \otimes z \rangle_H^2 \leq \|x \otimes y\|_H^2 \|y \otimes z\|_H^2 \end{aligned}$$

Da $x \otimes y$ og $y \otimes z$ begge står vinkelret på to vektorer med imaginær norm, må de have positiv reel norm. Dermed er også

$$\langle x \otimes y, y \otimes z \rangle_H \leq \|x \otimes y\|_H \|y \otimes z\|_H.$$

Ved at bruge disse ting, får vi så følgende udregning for $x, y, z \in H^n$:

$$\begin{aligned} \cosh(\eta(x, y) + \eta(y, z)) &= \cosh \eta(x, y) \cosh \eta(y, z) + \sinh \eta(x, y) \sinh \eta(y, z) \\ &= \langle x, y \rangle_H \langle y, z \rangle_H + \|x \otimes y\|_H \|y \otimes z\|_H \\ &\geq \langle x, y \rangle_H \langle y, z \rangle_H + \langle x \otimes y, y \otimes z \rangle_H \\ &= \langle x, y \rangle_H \langle y, z \rangle_H + (\langle x, z \rangle_H \langle y, y \rangle_H - \langle x, y \rangle_H \langle y, z \rangle_H) \\ &= \langle x, z \rangle_H \|y\|_H^2 = \langle -x, z \rangle_H \\ &= \cosh \eta(x, z). \end{aligned}$$

Da \cosh er en voksende funktion for positive værdier, giver dette $\eta(x, y) + \eta(y, z) \geq \eta(x, z)$.

d_H er altså en metrik på H^n . □

Det metriske rum, (H^n, d_H) , vil vi kalde hyperbolsk n -rum, og betegne H^n .

2.2 Geodæter

Det kunne være rart at finde et mere generelt udtryk for de såkaldte 'rette linier' i Euklids postulater. Vi vil gerne have at en linie mellem to punkter, er den korteste vej mellem punkterne, og da vi nu har et indtryk af hvad afstande er, kan vi definere en sådan ret linie.

Definition 2.14 (Geodætisk bue). En *kurve* i et rum, X , er en kontinuert funktion, der går fra et lukket interval i \mathbb{R} til X .

Hvis X er et metrisk rum, er kurven $\alpha : [a, b] \rightarrow X$, $a < b \in \mathbb{R}$ en *geodætisk bue* i X , hvis den er afstandsbevarende.

Definition 2.15 (Geodætisk segment). I et metrisk rum, X , er et *geodætisk segment* der forbinder x og y fra X , billedet af en geodætisk bue; $\alpha : [a, b] \rightarrow X$, hvor $\alpha(a) = x$ og $\alpha(b) = y$.

Definition 2.16 (Geodætisk linie). En *geodætisk linie* i et metrisk rum, X , er en funktion, $\beta : \mathbb{R} \rightarrow X$, hvor der for ethvert punkt $x \in \mathbb{R}$ eksisterer $r > 0$, så β er afstandsbevarende mellem punkter i kuglen $B(x, r)$.

Definition 2.17 (Geodæt). En *geodæt* i et metrisk rum, X , er billedet af en geodætisk linie i X .

Et geodætisk segment i et metrisk rum, svarer altså til et af Euklids rette liniestykker, og en geodæt er den rette linie den kan forlænges udi.

2.2.1 E^n

Geodæterne i E^n er de normale rette linier, som vi kender dem. Mellem to punkter $x, y \in E^n$ vil det geodætiske segment være mængden $\{x + t(y - x) \mid 0 \leq t \leq 1\}$. (For bevis se [JR] s. 23)

2.2.2 S^n

Definition 2.18 (Storcirkel). Hvis V er et 2-dimensionelt underrum af \mathbb{R}^{n+1} , så definerer vi en *storcirkel* i S^n til at være $S = S^n \cap V$.

Vi vil vise at disse storcirkler er geodæterne i S^n , men først en definition og et lemma.

Definition 2.19 (Sfærisk afhængige). Tre punkter, $x, y, z \in S^n$, er *sfærisk afhængige* hvis og kun hvis der findes en storcirkel, hvor de alle tre ligger i. Da en storcirkel er i to dimensioner, er det ensbetydende med at de tre vektorer ligger i et 2-dimensionelt underrum.

Lemma 2.20. Lad $\alpha : [a, b] \rightarrow S^n$ være en kurve i S^n . Hvis $b - a < \pi$, er følgende tre ting ækvivalente:

- (1) α er en geodætisk bue.
- (2) Der eksisterer to vektorer $x, y \in S^n$, som opfylder at $\langle x, y \rangle_E = 0$ og

$$\alpha(t) = (\cos(t - a))x + (\sin(t - a))y.$$

- (3) α opfylder differentialligningen $\alpha'' + \alpha = 0$

2.2 Geodæter

Bevis: (1) \Rightarrow (2) Antag først at $\alpha : [a, b] \rightarrow S^n$ er en geodætisk bue og lad $t \in [a, b]$. Da α er afstandsbevarende er $d_E(a, b) = d_S(\alpha(a), \alpha(b))$. Dvs.

$$\theta(\alpha(a), \alpha(b)) = b - a = (t - a) + (b - t) = \theta(\alpha(a), \alpha(t)) + \theta(\alpha(t), \alpha(b)).$$

Da $b - a < \pi$, kan vi se fra første lighedstegn at $\alpha(a)$ og $\alpha(b)$ ikke er hinandens antipoler. Bemærkning 2.8 giver at de tre punkter $\alpha(a)$, $\alpha(b)$ og $\alpha(t)$ ligger i et 2-dimensionelt underrum af \mathbb{R}^{n+1} , altså at de er sfærisk afhængige. Vi lader $S = S(\alpha(a), \alpha(b))$ betegne den entydig bestemte storcirkel, som indeholder $\alpha(a)$ og $\alpha(b)$. Da denne også indeholder $\alpha(t)$, for alle $t \in [a, b]$, betyder det at billedet af α er indeholdt i S .

Vi kan antage at det 2-dimensionale underrum, som S ligger i, er underrummet udspændt af $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ og $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, da en rotation er en transformation. S kan ligeledes roteres, uden at ændre på afstande, så $\alpha(a) = e_1$.

$\alpha(t)$ bevæger sig altså kontinuert rundt på en cirkel med førstekoordinat:

$$\langle e_1, \alpha(t) \rangle_E = \langle \alpha(a), \alpha(t) \rangle_E = \cos \theta(\alpha(a), \alpha(t)) = \cos(t - a).$$

og dermed anden koordinat; $\langle e_2, \alpha(t) \rangle_E = \pm \sin(t - a)$, med enten plus- eller minustegn for alle t .

Vi har altså at

$$\alpha(t) = (\cos(t - a))e_1 + (\sin(t - a))(\pm e_2).$$

Da $\langle e_1, \pm e_2 \rangle_E = 0$, opfylder α (2).

(2) \Rightarrow (1) Antag der eksisterer to vektorer $x, y \in S^n$, som opfylder at $\langle x, y \rangle_E = 0$ og $\alpha(t) = (\cos(t - a))x + (\sin(t - a))y$. For $s, t \in [a, b]$, $s \leq t$, ved vi fra definitionen af θ , at

$$\begin{aligned} \cos \theta(\alpha(s), \alpha(t)) &= \frac{\langle \alpha(s), \alpha(t) \rangle_E}{\|\alpha(s)\|_E \|\alpha(t)\|_E} = \langle \alpha(s), \alpha(t) \rangle_E \\ &= \langle (\cos(s - a))x + (\sin(s - a))y, (\cos(t - a))x + (\sin(t - a))y \rangle_E \\ &= \cos(s - a) \cos(t - a) + \sin(s - a) \sin(t - a) = \cos(t - s). \end{aligned}$$

Da $t - s < \pi$, har vi også fra definitionen af θ , at $\theta(\alpha(s), \alpha(t)) = t - s$. Da α altså er en afstandsbevarende funktion (og alle afstandsbevarende funktioner er kontinuerte) må den være en geodætisk bue.

(2) \Rightarrow (3) Hvis vi antager (2), vil der for alle $t \in [a, b]$ gælde, at

$$\alpha''(t) = -\cos(t - a)x - \sin(t - a)y = -\alpha(t), \text{ så } \alpha'' + \alpha = 0.$$

(3) \Rightarrow (2) Antag α opfylder $\alpha'' + \alpha = 0$. Løsningen til denne anden grads differentialligningen er: $\alpha(t) = \cos(t - a)\alpha(a) + \sin(t - a)\alpha'(a)$. Vi mangler altså bare at vise at $\langle \alpha(a), \alpha'(a) \rangle_E = 0$ og at $\alpha'(a) \in S^n$.

Da $\alpha(t) \in S^n$ ved vi at $1 = \|\alpha(t)\|_E^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle_E$. Hvis vi differentierer begge sider af denne ligning, og lader $\alpha(t)_i$ betegne den i 'te koordinat i $\alpha(t)$, kommer vi frem til følgende:

$$0 = (\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle_E)' = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha(t)_i^2 \right)' = \sum_{i=1}^{n+1} 2\alpha(t)_i \alpha'(t)_i = \langle 2\alpha(t), \alpha'(t) \rangle_E.$$

Dvs. $\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle_E = 0$ gælder for alle $t \in [a, b]$ og altså specielt for $t = a$.

Hvis vi bruger at $\alpha(t) = \cos(t - a)\alpha(a) + \sin(t - a)\alpha'(a)$, får vi yderligere at

$$\begin{aligned} 1 &= \|\alpha(t)\|_E^2 = \cos^2(t - a)\|\alpha(a)\|_E^2 + \sin^2(t - a)\|\alpha'(a)\|_E^2 \\ &= \cos^2(t - a) + \sin^2(t - a)\|\alpha'(a)\|_E^2 \end{aligned}$$

Da dette gælder for alle $t \in [a, b]$, $a < b$, betyder det at $\|\alpha'(a)\|_E = 1$ og dermed at $\alpha'(a) \in S^n$. \square

Udover at lemmaet er alfa og omega i beviset for næste sætning, ser vi også fra (1) \implies (2), at geodætiske buer er glatte funktioner. Dette skal vi bruge senere, når vi bruger tangenter til at definere vinkler i sfæriske trekanter.

Sætning 2.21 (Storcirklerne i S^n er dens geodæter).

Bevis: En storcirkel i S^n kan parametriseres af funktionen; $\lambda(t) = \cos(t)x + \sin(t)y$, hvor $x, y \in S^n$ står vinkelrette på hinanden ($\langle x, y \rangle_E = 0$). Ifølge lemma 2.20 vil λ restringeret til et interval, $[a, b]$, $0 < b - a < \pi$, være en geodætisk bue. Da dette gælder for alle a og b , hvor $0 < b - a < \pi$, er λ en geodætisk linie.

Enhver storcirkel i S^n er altså en geodæt.

Hvis vi omvendt ser på en geodæt i S^n , betyder det at den er billedet af en geodætisk linie $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow S^n$.

Ifølge lemma 2.20 vil λ så opfylde differentiaalligningen $\lambda'' + \lambda = 0$ og dermed er

$$\lambda(t) = \cos(t)\lambda(0) + \sin(t)\lambda'(0).$$

På samme måde som i beviset for 2.20, kan det vises at $\langle \lambda(0), \lambda'(0) \rangle_E = 0$ og $\lambda'(0) \in S^n$.

λ er altså parametriseringen af en storcirkel i S^n og dermed er sætningen bevist. \square

Sfærisk geometri er altså lidt speciel, da de 'rette linier' er af endelig længde, selvom de fortsætter i det uendelige. Af denne grund, var sfærisk geometri også først vist umulig, da Euklids 2. postulat blev tolket, som at linier var ubegrænsede.

To rette linier vil også skære hinanden to steder, og som vi vil se lidt senere, er det liniestykke der eksisterer mellem to punkter ikke nødvendigvis entydigt.

Hvis $x, y \in S^n$ er to lineært uafhængige punkter, vil de udspænde et 2-dimensionelt underrum $V(x, y) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Så vil $S(x, y) = S^n \cap V(x, y)$ være en entydig storcirkel, der indeholder begge punkter.

Men er x og y i stedet lineært afhængige, vil der være uendelig mange storcirkler der indeholder dem begge, hvis $n > 1$. Mellem sådan to punkter, vil der altså være uendelig mange geodætiske segmenter. Vil man gerne slippe for dette, kan man komme uden om det ved at identificerer lineært afhængige punkter med hinanden.

2.2.3 P^n

Vi vil kalde to punkter, $x, y \in S^n$, for antipler, hvis de er lineært afhængige, dvs. hvis $x = -y$.

Antipode-afbildningen vil vi så definere til at være funktionen, $\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, hvor $\alpha(x) = -x$.

Hvis vi identificerer alle antipoler $x, -x \in S^n$ med det ene punkt $\pm x$, får vi et rum, der kaldes det reelle projektive n -rum. Dette betegnes også P^n , eller kaldes det projektive plan, hvis $n = 2$.

2.3 Trigonometri

Mellem to punkter $\pm x, \pm y \in P^n$ kan vi så definere afstanden, til at være den korteste af afstandene fra x til enten y eller $-y$ på kugleoverfladen. Vi har altså en metrik på P^n , defineret ved:

$$d_P(\pm x, \pm y) = \min\{d_S(x, y), d_S(x, -y)\}.$$

Det metriske rum, der udgøres af P^n med metrikken d_P , vil vi kalde elliptisk n -rum.

Var Euklids 1. postulat formuleret som at der mellem et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst andet punkt kunne trækkes en entydig linie, så ville elliptisk og ikke sfærisk geometri opfylde postulatet. Som allerede nævnt har vi ikke valgt denne formulering, og derfor vil vi heller ikke koncentrere os yderligere om geometrien på P^n .

2.2.4 H^n

Definition 2.22 (Hyperbolsk linie). En *hyperbolsk linie* er overlapningen af H^n med et 2-dimensionelt vektorrum, $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Hvis to punkter, $x, y \in H^n$, udspænder underrummet $V(x, y)$, vil $L(x, y) = H^n \cap V(x, y)$ være den entydige hyperbolske linie, der indeholder x og y . Som navnet antyder, er $L(x, y)$ en hyperbelgren.

Det er disse hyperbolske linier, som er geodæterne i H^n . Beviset er meget lig beviset for S^n 's geodæter, og kan ses i [JR] s. 67.

2.3 Trigonometri

2.3.1 Sfærisk trigonometri

Hvis vi vil definere en trekant i S^2 med hjørnerne $x, y, z \in S^2$, må vi starte med at antage at der ikke findes en storcirkel, hvor alle punkterne ligger på. Hvis der gjorde det, ville det svare til at lave en trekant i E^2 med hjørner der lå på en ret linie - ikke særlig interessant.

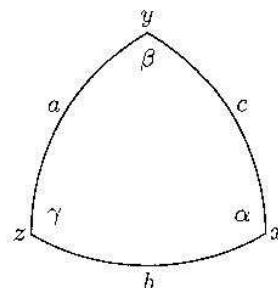
Med denne antagelse, er der ikke nogen af punkterne x, y, z som er antipoler af en af de andre, da dette ville lede til at de lå på en storcirkel. Vi har altså at det geodætiske segment mellem to af hjørnerne, lad os sige x og y , er entydigt bestemt, og vi vil betegne det $[x, y]$.

Derudover vil vi som før lade $S(x, y)$ betegne den entydige bestemte storcirkel, som indeholder x og y , og kalde den halvkugleskal som indeholder z og hvis rand er $S(x, y)$ for $H(x, y, z)$.

Definition 2.23 (Sfærisk trekant). Den sfæriske trekant, med de sfæriske uafhængige hjørner $x, y, z \in S^2$ (angivet i positiv omløbsretning), er

$$T(x, y, z) = H(x, y, z) \cap H(y, z, x) \cap H(z, x, y)$$

Siderne i $T(x, y, z)$ er $a = [z, y]$, $b = [x, z]$ og $c = [y, x]$ med sfæriske længder på henholdsvis $|a| = \theta(z, y)$, $|b| = \theta(x, z)$ og $|c| = \theta(y, x)$.



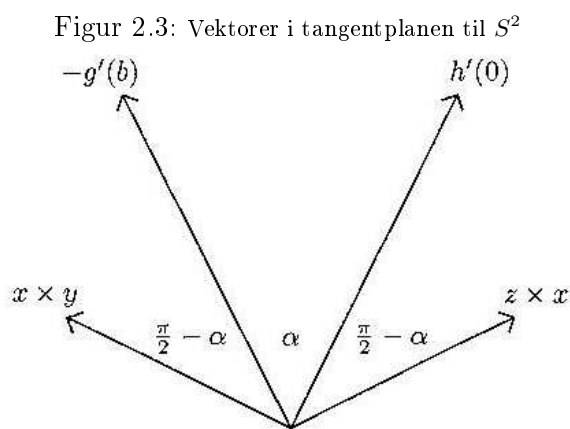
Figur 2.2: En sfærisk trekant

De tre vinkler i $T(x, y, z)$ mellem siderne b og c , c og a og a og b , kalder vi henholdsvis α , β og γ . Se figur 2.2.

Vi definerer dem til at være vinklen mellem sidernes tangenter i hjørnerne. Det vil sige, hvis vi lader $g : [0, |b|] \rightarrow S^2$ og $h : [0, |c|] \rightarrow S^2$ være de geodætiske buer fra henholdsvis z til x og x til y , er α vinklen mellem $-g'(|b|)$ og $h'(0)$. Ligeledes, hvis den geodætiske bue fra y til z er $f : [0, |a|] \rightarrow S^2$, defineres β og γ til at være vinklerne mellem henholdsvis $-h'(|c|)$ og $f'(0)$, og mellem $-f'(|a|)$ og $g'(0)$.

Bemærkning 2.24. Hvis vi ser på figur 2.3, hvor vektorerne $z \times x$, $x \times y$, $-g'(b)$ og $h'(0)$ er indtegnet, ses det at vinklen mellem $z \times x$ og $x \times y$ svarer til $\pi - \alpha$.

Ligeledes er $\theta(x \times y, y \times z) = \pi - \beta$ og $\theta(y \times z, z \times x) = \pi - \gamma$.



Sætning 2.25 (Vinkelsummen i en sfærisk trekant). Hvis α , β og γ er vinklerne i den sfæriske trekant $T(x, y, z)$, så er

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Bevis:

$$\begin{aligned} \langle (x \times y) \times (z \times x), (z \times x) \rangle_E &= \langle (\langle x, z \times y \rangle_E y - \langle y, z \times x \rangle_E x), z \times x \rangle_E \\ &= \langle x, z \times y \rangle_E \langle y, z \times x \rangle_E = -\langle y, z \times x \rangle_E^2 \end{aligned}$$

Da x , y og z er lineært uafhængige, vil $\langle y, z \times x \rangle_E \neq 0$ og dermed vil $x \times y$, $z \times y$ og $z \times x$ også være lineært uafhængige. Sætning 2.7, bemærkning 2.8, samt det at $d_S = \theta$ er en metrik, giver så:

$$\theta(x \times y, z \times x) < \theta(x \times y, z \times y) + \theta(z \times y, z \times x).$$

Fra bemærkning 2.24 får vi så, at $\pi - \alpha < \beta + \gamma$, som giver det ønskede. □

Før vi også begynder at se på arealer¹ af sfæriske trekanter, vil vi give en kort definition og introduktion af sfæriske koordinater.

Lad os se på en vektor, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, hvor $x_2, x_3 \neq 0$. Så definerer vi de sfæriske koordinater, (r, θ_1, θ_2) til:

¹Det sædvanlige Lebesguemål

2.3 Trigonometri

$$r = \|x\|_E > 0,$$

$$\theta_1 = \theta(e_1, x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \in [0, \pi] \text{ og}$$

$$0 < \theta_2 \leq 2\pi \text{ er den sfæriske vinkel fra } e_2 \text{ til } x_2e_2 + x_3e_3.$$

De opfylder at $x_1 = r \cos \theta_1$, $x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$ og $x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2$.

Sfæriske koordinater kan være en stor hjælp til at finde arealet af en delmængde af S^2 . Følgende nyttige sætning, vil dog ikke blive vist her.

Sætning 2.26. Lad $X \subseteq S^2$ være givet ved følgende uligheder i sfæriske koordinater:

$$r = 1, \quad \alpha_1 \leq \theta_1 \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq \theta_2 \leq \beta_2.$$

Så er arealet af X :

$$\text{Areal}(X) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \theta_1 \, d\theta_1 d\theta_2$$

Til forskel fra euklidisk og hyperbolsk geometri, er det i sfærisk geometri muligt at have flere forskellige geodætiske segmenter mellem forskellige punkter. Hvis $x, y \in S^2$ er antipoler, er der som sagt uendelig mange geodætiske segmenter mellem dem, og det er også dette der gør det muligt at have en polygon med to sider i S^2 . En sådan kaldes en måne, og svarer til overlapningen mellem to forskellige, ikke-modsatte halvkugleskaller. Den kan beskrives ved en enkel vinkel, som er den samme i de to hjørner. En måne med vinkel α , vil vi derfor betegne $L(\alpha)$. Hvis arealet af $L(\alpha)$ skal udregnes, kan vi udnytte at den i sfæriske koordinater, (r, θ_1, θ_2) , svarer til $r = 1$, $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ og $0 \leq \theta_2 \leq \alpha$. Så fra sætning 2.26, får vi:

$$\text{Areal}(L(\alpha)) = \int_0^\alpha \int_0^\pi \sin(\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^\alpha (-\cos(\pi) + \cos(0)) d\theta_2 = \int_0^\alpha 2 d\theta_2 = 2\alpha.$$

Da $L(\frac{\pi}{2})$ er det kvarte af S^2 , kan vi konkludere at $\text{Areal}(S^2) = 4\text{Areal}(L(\frac{\pi}{2})) = 4 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi$.

Definition 2.27 (Areal af sfærisk trekant). Hvis $T(x, y, z)$ er en sfærisk trekant med vinklerne α , β og γ , så har den arealet:

$$\text{Areal}(T) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Bevis: De tre storcirkler som T 's sider ligger i, deler parvist S^2 op i to halvmåner. De i alt seks halvmåner med arealer på 2α , 2β og 2γ , overlapper alle sammen i T eller antipode-afbildningen af T med samme areal. Arealet af kuglefladen svarer altså til summen af månernes arealer, fraregnet de fire gange som arealet af T tælles dobbelt. Dvs.

$$\begin{aligned} 4\pi &= \text{Areal}(S^2) = 2\text{Areal}(L(\alpha)) + 2\text{Areal}(L(\beta)) + 2\text{Areal}(L(\gamma)) - 4\text{Areal}(T) \\ &= 4\alpha + 4\beta + 4\gamma - 4\text{Areal}(T) \end{aligned}$$

Ved at dele igennem med fire og flytte lidt rundt, får vi altså den ønskede formel:

$$\text{Areal}(T) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi.$$

□

2.3.2 Hyperbolsk trigonometri

Når vi skal definere en hyperbolsk trekant, skal vi ligesom i euklidisk og sfærisk geometri, starte med tre hjørner, som ikke ligger på en 'ret linie'. I hyperbolsk geometri, betyder det at punkter $x, y, z \in H^2$, kan udgøre hjørnerne i en hyperbolsk trekant, hvis der ikke er en hyperbolsk linie der indeholder dem alle tre. Hvis $L(x, y)$ er den hyperbolske linie, der går igennem x og y , så kalder vi det lukkede halvplan indeholdende z og med $L(x, y)$ som rand, for $H(x, y, z)$.

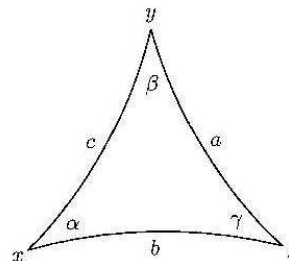
Definition 2.28 (Hyperbolsk trekant). Den hyperbolske trekant med hjørnerne $x, y, z \in H^2$ (angivet i negativ omløbsretning) er

$$T(x, y, z) = H(x, y, z) \cap H(y, z, x) \cap H(z, x, y)$$

Siden mellem to hjørner, x og y i trekanten, er segmentet af $L(x, y)$ fra x til y . Så siderne i $T(x, y, z)$ er; $a = [y, z]$, $b = [z, x]$ og $c = [x, y]$, med længder på henholdsvis $|a| = \eta(y, z)$, $|b| = \eta(z, x)$ og $|c| = \eta(x, y)$. Vi lader de geodætiske buer fra y til z , z til x og fra x til y være henholdsvis

$$f : [0, |a|] \rightarrow H^2 \quad g : [0, |b|] \rightarrow H^2, \quad \text{og,} \quad h : [0, |c|] \rightarrow H^2$$

Analogt med en sfærisk trekant, definerer vi vinklen, α , mellem siderne b og c til at være vinklen mellem c og b 's tangenter i x . Så hvis β er vinklen mellem c og a , svarer den til den hyperbolske vinkel mellem $-h'(|c|)$ og $f'(0)$. Den sidste vinkel γ i $T(x, y, z)$, defineres som vinklen mellem $-f'(|a|)$ og $g'(0)$.



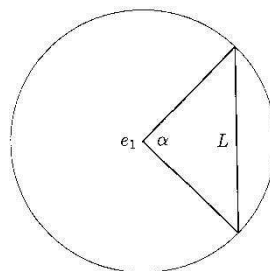
Figur 2.4: En hyperbolsk trekant

Hyperbolsk geometri har noget der tilsvarende den sfæriske geometris måne. Det kaldes en sektor og er en ikke-tom overlapning mellem to forskellige, ikke-modsatte halvplaner af H^2 . Hvis vi har en sektor, kan den beskrives ved vinklen i dens hjørne, e_1 , hvor de to halvplaner mødes. Derfor får sektoren betegnelsen $S(\alpha)$, hvor $\alpha < \pi$ er vinklen i e_1 .

Hvis vi forestiller os at vi betragter H^2 fra origo af, vil vi se en disk indeholdende punktet e_1 i centrum, og $S(\alpha)$ vil ses som to euklidiske rette liniestykker, der går fra e_1 til randen af disken.

Hvad vi ikke vil vise her, men som er en meget interessant ting, er nemlig at H^2 , fra origo af, ser ud som den projektive diskmodel. Hyperbolske linier i H^2 vil herfra se ud som rette euklidiske linier og hyperbolske trekanter vil se ud som euklidiske trekanter.

Vi går tilbage til at tænke på $S(\alpha)$ i den projektive diskmodel, og forestiller os en ret linie, L , der går



Figur 2.5: $T(\alpha)$ i den projektive diskmodel

2.3 Trigonometri

mellem de to punkter, hvor $S(\alpha)$ møder randen på disken. Se figur 2.5.

L vil være en hyperbolsk linie i H^2 , og overlapningen mellem $S(\alpha)$ og den del af H^2 , som indeholder e_1 og har L som rand, vil vi kalde $T(\alpha)$.

$T(\alpha)$ kan ses som en hyperbolsk trekant, hvor siderne i to af dens hjørner først mødes ved uendelig. Sådanne hjørner vil vi kalde ideelle hjørner, og definere deres vinkel til 0.

Hyperbolske trekanter, der har mellem 0 og tre ideelle hjørner, vil vi kalde generaliserede hyperbolske trekanter. En trekant med to ideelle hjørner, vil vi kalde for en sektortrekant.

Vi vil nu definere et modstykke til sfæriske koordinater, nemlig hyperbolske koordinater:

Lad $x = (x_1, x_2, x_3) \in H^2 \subset \mathbb{R}^3$, hvor $x_2, x_3 \neq 0$. Så definere vi de hyperbolske koordinater, (r, η_1, η_2) til:

$r > 0$ er absolutværdien af $\|x\|_H$, altså 1,

$\eta_1 = \eta(e_1, x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = \eta(e_1, x) \in [0, \pi]$ og

$0 < \eta_2 \leq 2\pi$ er den sfæriske vinkel fra e_2 til $x_2 e_2 + x_3 e_3$.

De opfylder at $x_1 = r \cosh \eta_1$, $x_2 = r \sinh \eta_1 \cos \eta_2$ og $x_3 = r \sinh \eta_1 \sin \eta_2$.

Sætning 2.29. *Lad $X \subseteq H^2$ være givet ved følgende uligheder i hyperbolske koordinater:*

$$r = 1, \alpha_1 \leq \eta_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \eta_2 \leq \beta_2.$$

Så er arealet af X :

$$\text{Areal}(X) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sinh \eta_1 \, d\eta_1 d\eta_2$$

Vi vil nu have vist hvad arealet i en generaliseret hyperbolsk trekant er. Dette bliver meget nemmere, hvis vi først viser hvad arealet er, i tilfældet hvor trekanten har to ideelle hjørner.

Lemma 2.30. *Arealet af en sektortrekant, er:*

$$\text{Areal}T(\alpha) = \pi - \alpha.$$

Bevis: Hvis vi vil beskrive en sektor, $S(\alpha)$, i hyperbolske koordinater, svarer den til mængden: $S(\alpha) = \{(r, \eta_1, \eta_2) \in H^2 | r = 1, -\frac{\alpha}{2} \leq \eta_2 \leq \frac{\alpha}{2}\}$. Vil vil lade $\beta = \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

$T(\alpha)$ er altså en trekant, der i hyperbolske koordinater er givet ved ulighederne; $r = 1, -\beta \leq \eta_2 \leq \beta$ og $0 \leq \eta_1 \leq \eta(e_1, x)$, hvor $x = (x_1, x_2, x_3) \in L$.

Så ved sætning 2.29 har vi:

$$\begin{aligned} \text{Areal } T(\alpha) &= \int_{-\beta}^{\beta} \int_0^{\eta(e_1, x)} \sinh \eta_1 \, d\eta_1 d\eta_2 = \int_{-\beta}^{\beta} (\cosh \eta(e_1, x) - 1) d\eta_2 \\ &= \int_{-\beta}^{\beta} x_1 \, d\eta_2 - \alpha. \end{aligned}$$

For at komme videre, bliver vi altså nødt til at finde ud af hvordan x_1 afhænger af η_2 .

For en generel vektor $(x_1, x_2, x_3) \in H^2$, havde vi at $x_1 = \cosh \eta_1$, $x_2 = \sinh \eta_1 \cos \eta_2$, og $x_3 = \sinh \eta_1 \sin \eta_2$. Ligger vektoren yderligere i en af de to sider i $S(\alpha)$, vil η_2 være β eller $-\beta$ alt efter hvilken en af siderne det er.

Dvs. at siderne i $S(\alpha)$ kan parametriseres på følgende måde:

$(\cosh \eta_1)e_1 + (\sinh \eta_1 \cos \beta)e_2 + (\sinh \eta_1 \sin \beta)e_3$ og

$(\cosh \eta_1)e_1 + (\sinh \eta_1 \cos \beta)e_2 - (\sinh \eta_1 \sin \beta)e_3$, hvor $\eta_1 \geq 0$.

Da $\cosh \eta_1, \sinh \eta_1 \rightarrow \eta_1$, når η_1 vokser, er disse asymptotiske til linierne

$s_1(\eta_1) = (\eta_1, \eta_1 \cos \beta, \eta_1 \sin \beta)$ og $s_2(\eta_1) = (\eta_1, \eta_1 \cos \beta, -\eta_1 \sin \beta)$, som ligger i de 1-dimensionelle vektorrum udspændt af henholdsvis $(1, \cos \beta, \sin \beta)$ og $(1, \cos \beta, -\sin \beta)$.

Det vektorrum, V , som $(1, \cos \beta, \sin \beta)$ og $(1, \cos \beta, -\sin \beta)$ udspænder, er netop det, som gennemskærer H^2 i L .

Det euklidiske krydsprodukt mellem disse to, vil altså være en normal til V . For enhver vektor $x \in V$, ved vi så at det indre produkt er 0, mellem x og

$$(1, \cos \beta, \sin \beta) \times (1, \cos \beta, -\sin \beta) = (-2 \cos \beta \sin \beta, 2 \sin \beta, 0).$$

En vektor $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$ opfylder altså følgende ligning:

$$0 = \langle (x_1, x_2, x_3), (-2 \cos \beta \sin \beta, 2 \sin \beta, 0) \rangle_E = -2x_1 \cos \beta \sin \beta + 2x_2 \sin \beta,$$

og dermed opfylder x også at $x_1 \cos \beta - x_2 = 0$, da $\sin \beta \neq 0$ fordi $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Alle vektorer i $L \subseteq V$ vil altså også opfylde dette.

Da L også er en delmængde af H^2 , vil en vektor $x \in L$ også opfylde ligningssystemet:

$$x_1 = \cosh \eta_1, \quad x_2 = \sinh \eta_1 \cos \eta_2, \quad x_3 = \sinh \eta_1 \sin \eta_2$$

Hvis vi sammendrager disse to ting, vil vi få følgende parametrisation af en vektor $x \in L$ ($\cos \beta, \cos \eta_2 \neq 0$, da $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_2}{\cos \beta} = \frac{\sinh \eta_1 \cos \eta_2}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{\cosh^2 \eta_1 - 1} \cos \eta_2}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{x_1^2 - 1} \cos \eta_2}{\cos \beta} \\ &\Rightarrow \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \eta_2} = \frac{x_1^2 - 1}{x_1^2} = 1 - \frac{1}{x_1^2} \\ &\Rightarrow x_1 = \left(1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \eta_2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos \eta_2}{\sqrt{\cos^2 \eta_2 - \cos^2 \beta}} \end{aligned}$$

Dermed har vi også at

$$x_2 = x_1 \cos \beta = \frac{\cos \beta \cos \eta_2}{\sqrt{\cos^2 \eta_2 - \cos^2 \beta}} \quad \text{og} \quad x_3 = x_2 \frac{\sin \eta_2}{\cos \eta_2} = \frac{\cos \beta \sin \eta_2}{\sqrt{\cos^2 \eta_2 - \cos^2 \beta}}.$$

2.3 Trigonometri

Vi får så at arealet af $T(\alpha)$ er:

$$\begin{aligned} \text{Areal}(T(\alpha)) &= \int_{-\beta}^{\beta} x_1 d\eta_2 - \alpha \\ &= \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cos \eta_2}{\sqrt{\cos^2 \eta_2 - \cos^2 \beta}} d\eta_2 - \alpha = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cos \eta_2}{\sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \eta_2}} d\eta_2 - \alpha \\ &= \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cos \eta_2}{\sin \beta \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \eta_2}{\sin^2 \beta}}} d\eta_2 - \alpha. \end{aligned}$$

Hvis vi laver substitutionen $u = \frac{\sin \eta_2}{\sin \beta}$, er $\frac{du}{d\eta_2} = \frac{\cos \eta_2}{\sin \beta}$ og $u \rightarrow \pm 1$ for $\eta_2 \rightarrow \pm \beta$.

Så vi får:

$$\begin{aligned} \text{Areal}(T(\alpha)) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du - \alpha = [\sin^{-1} u]_{-1}^1 - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} - \alpha \\ &= \pi - \alpha \end{aligned}$$

□

Sætning 2.31 (Arealet af en generaliseret hyperbolsk trekant). *Hvis α, β og γ er vinklerne i en generaliseret hyperbolsk trekant, T , så er:*

$$\text{Areal}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Bevis: Vi har allerede vist sætningen for trekanter med to ideelle vinkler ($\beta = \gamma = 0$).

Lad os nu se på tilfældet hvor T har tre ideelle vinkler ($\alpha = \beta = \gamma = 0$). Hvis vi tager et punkt x , inden i T , kan vi dele T op i tre sektortrekanter; $T(\alpha)$, $T(\beta)$ og $T(\gamma)$.

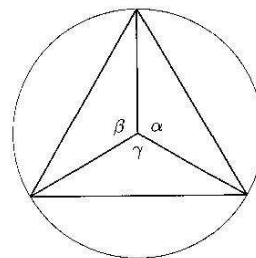
Se figur 2.6.

Arealet af T vil så være summen af sektortrekanternes:

$$\begin{aligned} \text{Areal}(T) &= \text{Areal}(T(\alpha)) + \text{Areal}(T(\beta)) + \text{Areal}(T(\gamma)) \\ &= (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) = 3\pi - 2\pi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Så sætningen holder også i dette tilfælde.

Hvis T er en trekant med én ideel vinkel ($\gamma = 0$), kan den ses som forskellen mellem to sektortrekanter, $T(\alpha)$ og $T(\pi - \beta)$, som det ses på figur 2.7.



Figur 2.6: Hyperbolsk trekant med tre ideelle hjørner, delt op i sektortrekanter.

Dermed har vi at:

$$\begin{aligned} \text{Areal}(T) &= \text{Areal}(T(\alpha)) - \text{Areal}(T(\pi - \beta)) \\ &= (\pi - \alpha) - (\pi - \pi + \beta) \\ &= \pi - (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

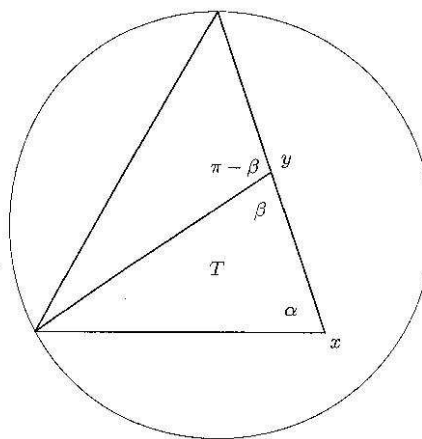
Vi mangler altså kun at tjekke tilfældet, hvor T ikke har nogen ideelle vinkler.

I dette tilfælde, kan vi finde en trekant, T' , med tre ideelle hjørner, som T er en del af. Dette gør vi ved at forlænge T 's sider til de rammer randen af den projektive disk, og så lade T' have hjørner her. Så svarer T' til summen af T og tre sektortrekanter; $T(\pi - \alpha)$, $T(\pi - \beta)$ og $T(\pi - \gamma)$. Se figur 2.8.

Dermed er arealet af T :

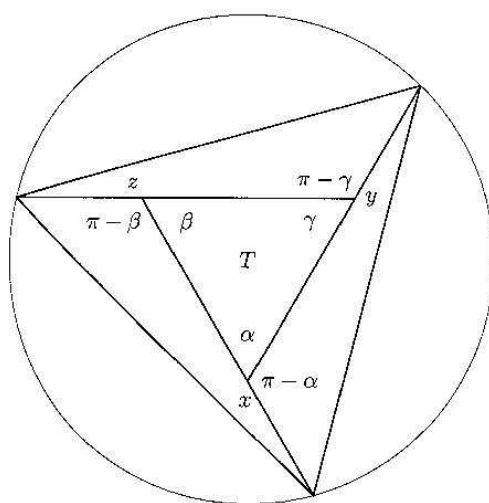
$$\begin{aligned} \text{Areal}(T) &= \text{Areal}(T') - T(\pi - \alpha) - T(\pi - \beta) - T(\pi - \gamma) = \pi - (\pi - \pi + \alpha) - (\beta) - (\gamma) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Så sætningen er vist for alle generaliserede trekanter. □



Figur 2.7:

Figur 2.8: T inden i T'



2.3 Trigonometri

Korollar 2.32 (Vinkelsummen i en hyperbolsk trekant). *Hvis α , β og γ er vinklerne i den generaliserede hyperbolske trekant $T(x, y, z)$, så er*

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

Bevis: Da $\text{Areal}(T) > 0$ følger dette direkte af sætning 2.31. □

Moderne tolkning af Euklids aksiomer

Inden opdagelsen af ikke-euklidisk geometri var der slet ikke noget der hed euklidisk geometri. Der var kun én slags geometri, og det var beskrivelsen af den fysiske verden. Idéen bag opbygningen af Euklids 'Elementer', var at dele sandhederne om verden op i de åbenlyse (aksiomerne) og i dem der kunne udledes fra disse. I dag kan man vælge sine aksiomer som man vil det (bare de ikke er vist inkonsistente), men tilgængæld er betydningen af ordet 'sandhed' også ændret. Ting kan være sande inden for et bestemt aksiomssystem, ikke bare generelt sande som Euklid ønskede. Dette er dog ikke ensbetydende med at nogle aksiomssystemer ikke er mere interessante eller anvendelige end andre. Fordi Euklids aksiomer netop var valgt, så de skulle afspejle naturen som man så den, kom det man udledte fra dem også tilnærmelsesvist til at passe på virkeligheden. I de små afstande vi er vant til på Jorden, følger naturen approximativt Euklids aksiomer, og den euklidiske geometri giver derfor også en god beskrivelse af vores lille verden.

Skal vi arbejde med Euklids aksiomer i dag, bliver det på en hel anden måde. I stedet for at sige, at geometri er virkeligheden og at den opfylder nogle bestemte ting, vil vi definere geometri til at være det, der opfylder de bestemte ting vi ønsker. Så kan vi udfra denne definition udlede en masse om hvad der gælder for det vi kalder en geometri, og det vil være sandt inden for vores aksiomssystem.

I dette kapitel vil vi gerne se på hvordan Euklids aksiomer er blevet moderniseret og generaliseret. Vi vil definere hvad et geometrisk rum er, hvor euklidisk er et særtilfælde, som afspejler Euklids forestillinger om geometri.

I sidste kapitel fik vi defineret et geodætisk segment, så det passer til hvad vi gerne vil have en generel, ret linie skal være. At sige der på et metrisk rum, X , eksisterer et geodætisk segment mellem ethvert par af forskellige punkter, lyder dermed meget som en generel beskrivelse af Euklids 1. postulat. På samme måde svarer 2. postulat til, at ethvert geodætisk segment er indeholdt i en geodætisk linie på X .

Hvis vi som i Euklids 3. postulat begynder at tale om cirkler, vil det være mest rimeligt, at lade en cirkel i et generelt geometrisk rum, være noget der er homeomorft med en cirkel som vi kender den i E^n . Skal cirkler kunne tegnes med en hvilken som helst radius, er det lidt specielt med S^n , der er af endelig udstrækning. En hvilken som helst radius, bliver så nød til at betyde en hvilken som helst længde af et geodætisk segment og ikke et hvilket som helst reelt tal.

For det 4. postulat, som hedder at alle rette vinkler er ens, må den underliggende tanke være, at man kan flytte rundt på figurer, mens de stadig forbliver kongruente. Altså at geometrien er den samme lige meget hvor på X man befinder sig, og at alle punkter kan flyttes rundt med isometrier, så de lander et hvilken som helst sted på X man ønsker.

Her er hvordan man har valgt at definere et geometrisk rum ([JR]):

Definition 3.1 (n -dimensionelt geometrisk rum). Et n -dimensionelt geometrisk rum, er et metrisk rum, X , som opfylder følgende aksiomer:

1. Vilkårlige to punkter $x, y \in X$ kan forbindes af et geodætisk segment i X .
2. Enhver geodætisk bue, $\alpha : [a, b] \rightarrow X$, kan forlænges til en entydig bestemt geodætisk linie; $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow X$.
3. Der eksisterer $k > 0$ og en funktion $\varepsilon : E^n \rightarrow X$, sådan at $B(0, k)$ afbildes homeomorft på $B(\varepsilon(0), k)$ af ε . Derudover skal der for hvert punkt $u \in S^{n-1}$ gælde, at afbildningen $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ defineret ved $\lambda(t) = \varepsilon(tu)$, er en geodætisk linie, hvor λ begrænses til en geodætisk bue på intervallet $[-k, k]$.
4. For hvert par af punkter $x, y \in X$, eksisterer der en isometri, φ på X , så $\varphi(x) = y$.

Med denne definition er E^n , S^n og H^n geometriske rum. De er dog ikke de eneste. Skal vi finde en definition der svarer til netop E^n , S^n og H^n (op til homeomorfi) er det hvad der kaldes en n -dimensionel geometri med konstant krumning. Denne definition vil vi ikke komme ind på i dette projekt, da den kræver kendskab til Riemannmangfoldigheder, som vi ikke har været inde på.

Konstruktion af euklidiske, hyperbolske og sfæriske flader

I dette kapitel vil vi se på hvordan vi kan konstruere euklidiske, sfæriske og hyperbolske flader, ved at 'lime' delmængder af E^2 , S^2 eller H^2 sammen på forskellige måder.

Først skal vi have en masse definitioner på plads. For eksempel hvad en flade helt præcist er og hvad det at 'lime' flader sammen formelt skal betyde.

Definition 4.1 (Mangfoldighed). Et topologisk rum, X , er en n -mangfoldighed, hvis det er Hausdorff, og der om hvert punkt i X eksisterer en åben omegn, som er homeomorf med en åben mængde i E^n . Hvis $n = 2$, kaldes X en (topologisk) flade.

Definition 4.2 ((X, G) -atlas). Lad M være en n -mangfoldighed og lad G være en gruppe af similiteter på et metrisk rum, X .

En mængde af funktioner, $\Phi = \{\varphi_i : U_i \rightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}}$, som vi vil kalde kort, er så et (X, G) -atlas for M , hvis den opfylder følgende 4 betingelser:

- $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ dækker hele M .
- For hvert $i \in \mathcal{I}$, er U_i en åben, sammenhængende delmængde af M .
- U_i afbildedes homeomorft over i en åben delmængde af X for hvert kort, φ_i , $i \in \mathcal{I}$.
- Lad U_i og U_j være overlappende, for $i, j \in \mathcal{I}$. For $x \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$, vil der i en omegn af x gælde at funktionen; $\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$, stemmer overens med en funktion i G .

Et (X, G) -atlas for M er maksimalt, hvis det indeholder alle andre (X, G) -atlaser for M .

Definition 4.3 ((X, G) -struktur og (X, G) -mangfoldighed). Et maksimalt (X, G) -atlas for en mangfoldighed, M , kaldes en (X, G) -struktur for M . Og M sammen med en (X, G) -struktur, er en (X, G) -mangfoldighed.

Hvis intet andet er nævnt, vil X fra nu af betegne S^2 , E^2 eller H^2 og G en gruppe af isometrier på X .

Definition 4.4 (Konveks). Lad $x, y \in X$ være forskellige og ikke antipoler i S^2 - et geodætisk segment, $[x, y]$, der forbinder x med y , vil da være entydigt.

En delmængde, C , af X er da *konveks*, hvis og kun hvis der for alle sådanne par af x og y gælder, at $[x, y]$ er indeholdt i X .

Det vil blandt andet sige, at mængden bestående af to antipoler i S^2 er konveks.

Definition 4.5 (Side i en konveks mængde). Lad C være en konveks delmængde af X . Så er S en side i C , hvis S er en ikke-tom, konveks delmængde af randen af C i X , som ikke er indeholdt i nogen større konveks delmængde af randen af C .

Definition 4.6 (Konveks polygon). En *konveks polygon* i X er en ikke-tom, lukket, konveks delmængde af X med endeligt mange sider.

Det vil for eksempel sige, at S^2 , samt en halvkugleskal af S^2 , ikke er konvekse polygoner i E^2 , men er det i S^2 . De har henholdsvis ingen og en side i S^2 . Disken er heller ikke en konveks polygon i E^2 , selvom det er en lukket, konveks delmængde heraf. For alle de uendelig mange et-punktsmængder på randen, er sider.

Vi vil fra nu af lade \mathcal{P} betegne en endelig mængde af disjunkte, konvekse polygoner i X , og \mathcal{S} betegne samlingen af deres sider.

Definition 4.7 (G -side-kobling). En mængde af funktioner

$\Phi = \{g_S \in G \mid S \in \mathcal{S}\}$ er en G -side-kobling for \mathcal{P} , hvis følgende tre ting er opfyldt:

- For enhver side $S \in \mathcal{S}$, findes en side $S' \in \mathcal{S}$ så $g_S(S') = S$.
(S' vil være entydigt bestemt af S , da g_S er en isometri, og Φ siges at koble S og S' .)
- For $S, S' \in \mathcal{S}$ vil $g_{S'} = g_S^{-1}$.
- Hvis S er en side i $P \in \mathcal{P}$ og S' er en side i $P' \in \mathcal{P}$, vil $P \cap g_S(P') = S$.

Vi lader Π betegne den topologiske sum af de disjunkte polygoner i \mathcal{P} : $\Pi = \cup_{P_i \in \mathcal{P}} P_i$.

Lad Φ være en G -side-kobling, og lad x og x' være to punkter i Π . Hvis x og x' ligger i sider i \mathcal{S} , som er koblet af Φ , og hvis $g_S(x') = x$, siger vi at x og x' er koblet af Φ . Vi bruger notationen $x \simeq x'$, for x og x' koblet.

Det at være koblet inducerer en ækvivalensrelation på Π , hvor vi siger at to punkter $x, y \in \Pi$ er relaterede af Φ , hvis $x = y$ eller der findes en endelig følge af punkter i Π , så

$x = x_1 \simeq x_2 \simeq \dots \simeq x_m = y$. For $x \in \Pi$ lader vi $[x] = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ betegne ækvivalensklassen i Π , som indeholder x . Hvis M er kvotientrummet af ækvivalensklasser i Π , siger vi at Φ har limet polygonerne i \mathcal{P} sammen til M .

Vi vil fra nu af lade den polygon i \mathcal{P} , der indeholder x_i være P_i . Vinklen om x_i indeholdt i P_i , vil vi betegne $\theta(P_i, x_i)$. Er x i det indre af P_i eller i det indre af en side i P_i , vil vi definere $\theta(P_i, x_i)$ til at være henholdsvis 2π og π . Ligger x_i i to af siderne i P_i , vil $\theta(P_i, x_i)$ betegne vinklen mellem de to tangenter til siderne i x_i - som vinklen i en trekants hjørne. For et sådant x_i i et hjørne, vil $\theta(P_i, x_i)$ altså være skarpt mindre end π .

Vi definerer så vinkelsummen af $[x]$ til at være: $\theta[x] = \theta(P_1, x_1) + \theta(P_2, x_2) + \dots + \theta(P_m, x_m)$.

Definition 4.8 (Passende G -side-kobling). Lad Φ være en G -side-kobling. Så er Φ passende, hvis der for hvert $x \in \Pi$ gælder at $\theta[x] = 2\pi$.

Sætning 4.9. Hvis $\Phi = \{g_S \mid S \in \mathcal{S}\}$ er en passende G -side-kobling for \mathcal{P} , vil der for hver side, $S \in \mathcal{S}$, gælde:

- (1) Ingen punkter i S' fikses af isometrien g_S .
- (2) S og S' er ens hvis og kun hvis S er en storcirkel i S^2 og g_S er antipode-afbildningen af S^2 .

Bevis: Lad $\Phi = \{g_S | S \in \mathcal{S}\}$ være en passende G -side-kobling for \mathcal{P} .

(1) Antag for modstrid, at der eksisterer $x \in S'$, så $g_S(x) = x$. Vi ser først på tilfældet, hvor x ligger i det indre af S' , altså hvor $m = 2$ med betegnelsen: $[x] = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Hvis $P \in \mathcal{P}$ er den polygon, der indeholder x , har vi at $\theta(P, x) = \pi$. Da x kun er koblet med sig selv, vil $[x] = \{x_1, x_2\} = \{x\}$. Men det vil sige $\theta[x] = \theta(P, x) = \pi$, som er i modstrid med antagelsen om at Φ var passende.

Hvis i stedet x er et endepunkt af S' , vil $\theta(P, x) < \pi$ og x vil også ligge i en enkelt anden side $T \in \mathcal{S}$. Da $g_S(S') = S$, har vi at x også ligger i S . Da polygonerne i \mathcal{P} er disjunkte, må S altså være lig enten S' eller T . Hvis $S' = S = g_S(S')$, vil de indre punkter af S' blive fikset af g_S , og dette gav modstrid. Det vil sige at $S = T$, og dermed er $[x] = \{x\}$ ligesom før, da x kun er relateret til sig selv. Vinkelsummen er så; $\theta[x] = \theta(P, x) < \pi$, som igen strider imod at Φ er passende.

Vi kan altså slutte, at g_S ikke fikser nogen punkter i S' .

(2) Først antages at $S = S'$. Da $g_S^{-1} = g_{S'} = g_S$, er g_S sin egen inverse. Hvis vi ser på $x \in S$ vil x også ligge i S' , dvs $g_S(x) = x' \in S$. Ifølge (1) er $x \neq x'$, og hvis vi antager for modstrid, at de ikke er antipoler i S^2 , vil det geodætiske segment der forbinder dem, være entydigt. Da g_S er afstandsbevarende, må midtpunktet af dette segment være fikspunkt for g_S . Men så er dette i modstrid med (1), så x og x' må være antipoler i S^2 , og g_S dermed antipode-afbildningen på S . S må så være en storcirkel, da den er uændret af g_S . Polygonen, P , der indeholder $S = S'$, er konvekst, og må derfor være en halvkugleskal. Da $P \cap g_S(P) = S$, må g_S være antipode-afbildningen på hele S^2 .

Nu antages det omvendt at S er en storcirkel i S^2 og at g_S er antipode-afbildningen af S^2 . Da antipode-afbildningen af S^2 er sin egen inverse, samt sender en storcirkel over i sig selv, har vi: $S' = g_{S'}(S) = g_S^{-1}(S) = g_S(S) = S$.

Så sætningen er bevist. □

Før vi slutter af med hovedsætningen, har vi først brug for et lemma og en definition mere. Vi vil ikke vise lemmaet her, men bevis kan ses i [JR] s. 356.

Definition 4.10 ((X, G) -afbildning). En (X, G) -afbildning, er en kontinuert funktion, $\tau : N \rightarrow M$, mellem to (X, G) -mangfoldigheder, som opfylder følgende:

For ethvert kort for N , $\varphi_i : U \rightarrow X$, og ethvert kort for M , $\psi_j : V \rightarrow X$, hvor U og $\tau^{-1}(V)$ overlapper, vil funktionen $\psi_j \tau \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U \cap \tau^{-1}(V)) \rightarrow \psi_j(\tau(U) \cap V)$, stemme overens med et element i G i en omegn om ethvert punkt i dens definitionsområde.

Lemma 4.11. *Lad $\tau : N \rightarrow M$ være en funktion mellem (X, G) -mangfoldigheder. Så er τ en (X, G) -afbildning hvis og kun hvis følgende betingelser er opfyldt:*

- $\forall x \in N$ eksisterer en afbildning $\varphi : B(x) \rightarrow X$, hvor $B(x) \subseteq N$ er en åben omegn om x , så τ afbilder $B(x)$ homeomorft ind i en åben mængde af M .
- $\varphi \tau^{-1} : \tau(B(x)) \rightarrow X$ er et kort for M .

Sætning 4.12. *Hvis M er en flade fremkommet ved at lime en gruppe \mathcal{P} sammen med en passende G -side-kobling, Φ , vil M være en 2-mangfoldighed. M vil have en sådan (X, G) -struktur, at det indre af ethvert $P \in \mathcal{P}$ afbilledet ind i M ved den naturlige injektion, er en (X, G) -afbildning.*

Bevis: Hvis der findes en polygon i \mathcal{P} med 0 sider, vil den være hele X , og med $M = X$ følger et trivielt bevis. Lad os derfor antage at ethvert $P \in \mathcal{P}$ har mindst en side.

Vi vil først vise at M er en 2-mangfoldighed. Dette gøres ved at finde en homeomorfi, der afbilder en åben omegn af ethvert punkt i M over i en åben mængde i E^2 , samt vise at M er Hausdorff.

Lad x være et punkt i Π og lad $U(\pi(x), r)$ være en åben omegn af $\pi(x) \in M$. Vi vil vise at en funktion, φ_x , som sender $U(\pi(x), r)$ over i $B(x, r) \subseteq X$ er en homeomorfi for et tilstrækkeligt småt r . $B(x, r) \subseteq X$ kan betragtes som en kugle både i X og i E^2 , da X selv er en 2-mangfoldighed.

Lad $x \in \Pi$ og lad $[x] = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ være som før beskrevet. For hvert i lader vi $P_i \in \mathcal{P}$ betegne den polygon der indeholder x_i , og vi lader $\theta_i = \theta(P_i, x_i)$.

Hvis $m > 1$ er der en side $S_i \in \mathcal{S}$ entydigt bestemt af $S_{i+1} \in \mathcal{S}$, så

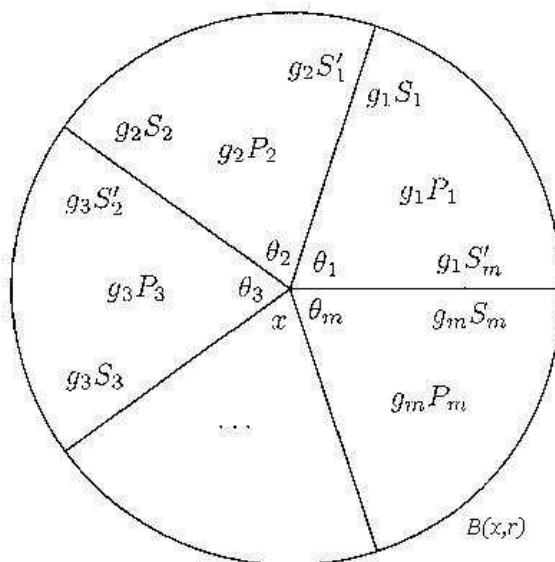
$g_{S_i}(x_{i+1}) = x_i$ for $i = 1, 2, \dots, m-1$ og $g_{S_m}(x_1) = x_m$.

Vi definerer nu; $g_i = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ g_{S_1} \cdots g_{S_m} & i = 2, \dots, m \end{cases}$, som opfylder at $g_i x_i = x$ for alle i .

Da også g_i er injektiv, er $g_i(P_i \cap B(x_i, r)) = g_i P_i \cap g_i B(x_i, r) = g_i P_i \cap B(x, r)$.

Vi sætter r til at være et tal, der for alle i er mindre end det kvarte af afstanden fra både x_i til x_j , $i \neq j$ og fra x_i til $S_j \subseteq P_i$, hvor $x_i \notin S_j$. Så vil der for $i = 1, 2, \dots, m$, gælde at mængderne $P_i \cap B(x_i, r)$ er disjunkte og de vil være cirkeludsnit med centervinkel θ_i af $B(x_i, r)$.

Figur 4.1:



Vi vil gerne bruge at $B(x, r) = \cup_{i=1}^m (g_i P_i \cap B(x, r))$ (se figur 4.1), så det vil vi nu vise, startende med tilfældet $m = 1$:

Med $[x] = \{x_1\}$, har vi at $B(x, r) \subseteq P = P_1$. Det vil sige, at

$$\begin{aligned} B(x, r) &= 1 \cdot P \cap B(x, r) = g_1 P_1 \cap B(x, r) \\ &= \cup_{i=1}^1 (g_i P_i \cap B(x, r)). \end{aligned}$$

Hvis i stedet $m = 2$, vil x ligge i en side $S = S_1 \subseteq P$ og dermed kun være relateret til en anden. Så er

$$\begin{aligned} B(x, r) &= (P \cap B(x, r)) \cup (g_{S_1} P_2 \cap B(x, r)) = (g_1 P_1 \cap B(x, r)) \cup (g_2 P_2 \cap B(x, r)) \\ &= \cup_{i=1}^2 (g_i P_i \cap B(x, r)). \end{aligned}$$

For tilfældet $m > 2$, vil x være et hjørne af P . Så vil x_i foruden S_i også ligge i S'_{i-1} i P_i . Hvis vi regner indekset i modulo m , får vi fra $S_i = g_{s_i}(S'_i)$, at $g_i(S_i) = g_{S_1} \cdots g_{s_{i-1}}(g_{S_i} S'_i) = g_{i+1} S'_i$. Da g_i er injektiv, får vi ligeledes fra $P_i \cap g_{s_i}(P_{i+1}) = S_i$, at $g_i P_i \cap g_{i+1}(P_{i+1}) = g_i S_i$. Sidderne $g_i S_i$ og $g_i S'_{i-1}$ er siderne i $g_i P_i$, som ender i punktet $g_i x_i = x$. Som det også ses på figur 4.1, vil cirkeludsnittene $g_i P_i \cap B(x, r)$ altså ligge side om side rundt om punktet x . Da G er en passende side-kobling vil deres centervinkler tilsammen give 2π , og vi har altså dannet en hel kugle. Vi har altså for alle m :

$$\cup_{i=1}^m (g_i P_i \cap B(x, r)) = B(x, r).$$

Vi lader $U(\pi(x), r) = \pi(\cup_{i=1}^m (P_i \cap B(x_i, r)))$, så er den en omegn af $\pi(x)$. Da π er kvotientafbildningen mellem Π og M og $\cup_{i=1}^m (P_i \cap B(x_i, r)) = \pi^{-1}(U(\pi(x), r))$ er en åben mængde i Π , er $U(\pi(x), r)$ en åben mængde i M .

Vi definerer nu funktionen $\psi_x : \cup_{i=1}^m (P_i \cap B(x_i, r)) \rightarrow B(x, r)$ ved at $\psi_x(z) = g_i z$ for $z \in P_i \cap B(x_i, r)$. Vi sammensætter så en funktion $\varphi_x = \psi_x \pi^{-1} : U(\pi(x), r) \rightarrow B(x, r)$, som gerne skal være vores ønskede homeomorfi. Hvis vi ser på et $\pi(z) \in U(\pi(x), r) \subseteq M$, vil φ_x først sende punktet i mængden $\{z_1, \dots, z_p\} \in \Pi$ og sende disse videre til et enkelt punkt, $z \in g_i P_i \cap B(x, r)$, så φ_x er injektiv. For et $z \in B(x, r)$ vil der være et i så $z \in g_i P_i \cap B(x, r)$, og z vil altså rammes af $\pi(z)$. φ_x er altså også surjektiv og dermed bijektiv. Dens inverse som tager et $z \in g_i P_i \cap B(x, r)$ og sender det i $\pi(g_i^{-1} z) \in U(\pi(x), r)$ er altså også bijektiv. Da begge sender åbne mængder i åbne mængder, er de begge kontinuerte og φ_x er altså en homeomorfi.

Vi skal så have vist at M er Hausdorff, altså at der om to vilkårlige, forskellige punkter i M , eksisterer åbne, disjunkte mængder.

Lad $\pi(x)$ og $\pi(y)$ være to forskellige punkter i M , og lad $x, y \in \Pi$ være relaterede til henholdsvis m og n forskellige punkter i Π med hensyn til Φ . $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ og $[y] = \{y_1, \dots, y_n\}$ vil så være disjunkte mængder i Π , da ellers $\pi(x) = \pi(y)$.

Tilsvarende P_i og r , lader vi Q_j være den polygon som indeholder y_j , og s være en radius der for alle j opfylder hvad r gjorde for alle i . Dermed får vi som før, at

$$U(\pi(x), r) = \pi(\cup_{i=1}^m (P_i \cap B(x_i, r))) \text{ og } U(\pi(y), s) = \pi(\cup_{j=1}^n (Q_j \cap B(y_j, s))).$$

Da $[x]$ og $[y]$ var disjunkte kan vi yderligere vælge r og s så små, at også $\cup_{i=1}^m (P_i \cap B(x_i, r))$ og $\cup_{j=1}^n (Q_j \cap B(y_j, s))$ er disjunkte mængder i Π . Så må $U(\pi(x), r)$ og $U(\pi(y), s)$ være åbne, disjunkte mængder, da $\pi^{-1}(U(\pi(x), r)) = \cup_{i=1}^m (P_i \cap B(x_i, r))$ og $\pi^{-1}(U(\pi(y), s)) = \cup_{j=1}^n (Q_j \cap B(y_j, s))$.

Da $\pi(x) \in U(\pi(x), r)$ og $\pi(y) \in U(\pi(y), s)$ er M Hausdorff og dermed en 2-mangfoldighed.

Vi vil nu vise at $\Phi = \{\varphi_x : U(\pi(x), r) \rightarrow B(x, r)\}_{x \in \Pi}$ er et maksimalt (X, G) -atlas for M . Dvs. at

- $U(\pi(x), r)$ er en åben sammenhængende delmængde af M for hvert x .
- $U(\pi(x), r)$ bliver afbilledet homeomorft på en åben delmængde af X af φ_x .
- $\{U(\pi(x), r)\}_{x \in \Pi}$ dækker hele M .
- Hvis $U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s) \neq \emptyset$, vil der for et punkt i denne mængde være en omegn, hvori funktionen; $\varphi_y \varphi_x^{-1} : \varphi_x(U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s)) \rightarrow \varphi_y(U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s))$, stemmer overens med en funktion i G .
- Φ er et maksimalt atlas for M .

$U(\pi(x), r)$ og φ_x er konstrueret så de opfylder de to første betingelser, og da $\{U(\pi(x), r)\}_{x \in \Pi}$ er defineret for alle punkter i M og med vilkårlig lille radius, vil den være en overdækning af M . Lad os nu antage at $U(\pi(x), r)$ og $U(\pi(y), s)$ overlapper, dermed vil $B(x, r)$ og $B(y_j, s)$ også overlappe for mindst et j , hvor $P = Q_j$. Vi vil vise, at $\varphi_y \varphi_x^{-1} = h_k \in G$ restringeret for en åben omegn af ethvert punkt i $\varphi_x(U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s))$. Vi bruger samme notation som før, og $h_j \in G$ er for y , hvad g_i er for x .

Vi lader x være den af x og y der er relateret til svagt færrest punkter i Π ; altså $m \leq n$.

Vi starter med tilfældet $m = 1$, altså hvor x ligger inde i P og dermed $B(x, r) \subseteq P$. Så er $\pi^{-1}(U(\pi(x), r)) = B(x, r)$ og der må findes et j så mængden $H = P \cap B(x, r) \cap Q_j \cap B(y_j, s)$ ikke er tom, da der ellers ikke ville være overlap. Hvis vi lader k være et indeks, for hvilket $H \neq \emptyset$, kan vi yderligere vise at det er det eneste sådanne. Det er trivielt for $n = 1$, så lad os antage at $n > 1$.

Vi antager for modstrid at der findes et $y_l \neq y_k$ så $H \neq \emptyset$, dvs. $y_k, y_l \in P$. Som vi har defineret s , må der være en mindste afstand på $2s$ mellem kuglerne $B(y_k, s)$ og $B(y_l, s)$. Så må r være en afstand større end s , da $B(x, r)$ ellers ikke ville overlappe med kuglerne rundt om y_k og y_l . Men afstanden fra x til de to y 'er skal også være mindst $4r$, da de ligger i en side i P . Da $r > 0$, har vi altså en modstrid: $4r < d(x, y_{k,l}) < r + s < 2r$.

Hvis vi bruger at $P = Q_k$ og at π er injektiv på det indre af en polygon, så får vi:

$$\begin{aligned} U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s) &= \pi(B(x, r)) \cap \pi(\cup_{j=1}^n Q_j \cap B(y_j, s)) \\ &= \pi((B(x, r)) \cap \cup_{j=1}^n Q_j \cap B(y_j, s)) \\ &= \pi(B(x, r) \cap B(y_k, s)) \end{aligned}$$

Det betyder, at:

$$\begin{aligned} \varphi_x(U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s)) &= \varphi_x \pi(B(x, r) \cap B(y_k, s)) \\ &= \psi_x(B(x, r) \cap B(y_k, s)) \\ &= g_1(B(x, r) \cap B(y_k, s)) \\ &= B(x, r) \cap B(y_k, s), \end{aligned}$$

da $B(x, r) \cap B(y_k, s) \subseteq P_1 = P$.

Ligeledes er:

$$\begin{aligned}
 \varphi_y(U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s)) &= \varphi_y \pi(B(x, r) \cap B(y_k, s)) \\
 &= \psi_y(B(x, r) \cap B(y_k, s)) \\
 &= h_k(B(x, r) \cap B(y_k, s)) \\
 &= B(x, r) \cap B(y_k, s),
 \end{aligned}$$

da $B(x, r) \cap B(y_k, s) \subseteq P = Q_k$.

På mængden $B(x, r) \cap B(y_k, s)$ er $\varphi_y \varphi_x^{-1} = \psi_y(\pi^{-1}\pi)\psi_x^{-1} = \psi_y = h_k$. Dvs, at der til ethvert punkt i $B(x, r) \cap B(y, s)$ vil være en omegn, hvori $\varphi_y \varphi_x^{-1} = h_k \in G$.

I tilfældet $m = 2$, vil x ligge i en side $S \in P$ og som før vil der være et indeks $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, så H ikke er tom. x og y_k må ligge i samme side i P , $S = T_k$, hvis reglerne for r og s skal overholdes, samtidig med at $B(x, r)$ og $B(y_k, s)$ skal overlappe. Hvis der også fandtes et y_l for hvilket $H \neq \emptyset$, ville de to y 'er ligge i hver sin ende af S ifølge sætning 4.9. Men så ville de også ligge i én anden side, og afstandsreglerne på r og s ville gøre at kuglerne ikke kunne overlappe som antaget. Så ligesom for $m = 1$, er der kun et j for hvilket $H \neq \emptyset$. Hvis vi indekserer så $P' = Q_{k+1} \pmod n$, vil $P' \cap B(x', r) \cap \cup_{j=1}^n Q_j \cap B(y_j, s) = P' \cap B(x', r) \cap Q_{k+1} \cap B(y_{k+1}, s)$.

Så får vi følgende:

$$\begin{aligned}
 U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s) &= \pi((P \cap B(x, r)) \cup (P' \cap B(x', r))) \cap \pi(\cup_{j=1}^n Q_j \cap B(y_j, s)) \\
 &= \pi(\cup_{j=1}^n (Q_j \cap B(y_j, s) \cap P \cap B(x, r)) \cup \cup_{j=1}^n (Q_j \cap B(y_j, s) \cap P' \cap B(x', r))) \\
 &= \pi((B(y_k, s) \cap P \cap B(x, r)) \cup (B(y_{k+1}, s) \cap P' \cap B(x', r))).
 \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
 \varphi_x(U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s)) &= \psi_x \pi^{-1} \pi(B(y_k, s) \cap P \cap B(x, r)) \cup ((B(y_{k+1}, s) \cap P' \cap B(x', r))) \\
 &= g_1(P \cap B(x, r) \cap B(y_k, s)) \cup g_S(P' \cap B(x', r) \cap (B(y_{k+1}, s))) \\
 &= (P \cap B(x, r) \cap B(y_k, s)) \cup (g_S(P') \cap B(x, r) \cup (B(y_k, s))) \\
 &= B(x, r) \cap B(y_k, s),
 \end{aligned}$$

hvor det er benyttet at g_i er en isometri, samt at

$$P \cap B(x, r) \cap B(y_k, s) \subseteq P_1 \cap B(x, r) \text{ og } (B(y_{k+1}, s) \cap P' \cap B(x', r)) \in P' \cap B(x, r) = P_2 \cap B(x, r).$$

Ligeledes får vi, ved bl.a. at benytte os af at $h_{k+1} = h_k \cdot h_{T_k} = g_S$:

$$\begin{aligned}
 \varphi_y(U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s)) &= \psi_y \pi^{-1} \pi(B(y_l, s) \cap P \cap B(x, r)) \cup ((B(y_{l+1}, s) \cap P' \cap B(x', r))) \\
 &= h_k(P \cap B(x, r) \cap B(y_k, s)) \cup h_{k+1}(P' \cap B(x', r) \cap (B(y_{k+1}, s))) \\
 &= h_k((P \cap B(x, r) \cap B(y_k, s)) \cup g_S(P' \cap B(x', r) \cap (B(y_{k+1}, s)))) \\
 &= h_k((P \cap B(x, r) \cap B(y_k, s)) \cup (g_S(P') \cap B(x, r) \cap (B(y_k, s)))) \\
 &= h_k(B(x, r) \cap B(y_k, s))
 \end{aligned}$$

På mængden $P \cap B(x, r) \cap B(y_k, s)$ har vi at $\varphi_y \varphi_x^{-1} = h_k \cdot g_1 = h_k$ og på $g_S(P' \cap B(x', r) \cap B(y_{k+1}, s))$ er $\varphi_y \varphi_x^{-1} = h_{k+1} g_S^{-1} = h_{k+1} g_{S'} = h_{k+1} h_{T_{k+1}} = h_k$.

$\varphi_y \varphi_x^{-1}$ er altså restriktionen af h_k på mængden

$$P \cap B(x, r) \cap B(y_k, s) \cup g_S(P' \cap B(x', r) \cap B(y_{k+1}, s)) = B(x, r) \cap B(y_k, s).$$

Hvis $m > 2$ ligger både x og y_k i et hjørne af P . Det er ikke muligt for dem at ligge i to forskellige hjørner på grund af afstandsreglerne for r og s , så $x = y_k$. Så er $s = r$, $m = n$ og for $z = x, y$ er:

$$\varphi_z(U(\pi(x), r) \cap U(\pi(y), s)) = \varphi_z(U(\pi(x), r)) = B(z, r).$$

Hvis vi regner modulo m og lader y_j 'erne være ordnet så $x_2 = y_{k+1}$ og dermed $x_i = y_{k+i-1}$, får vi også at $P_i = Q_{k+i-1}$ og $S_i = T_{k+i-1}$.

$B(x, t) = \cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, t)$, og på hver af mængderne $P_i \cap B(x, t)$, har vi at;

$$\varphi_y \varphi_x^{-1} = \psi_y(\pi^{-1} \pi) \psi_x^{-1} = h_{k+i-1} \cdot g_i^{-1} = h_k,$$

da det modulo m gælder, at

$$h_k g_i = h_k (g_{S_1} \cdots g_{S_{i-1}}) = h_{T_1} \cdots h_{T_{k-1}} (h_{T_k} \cdots h_{T_{k+i-2}}) = h_{k+i-1}.$$

$\varphi_y \varphi_x^{-1}$ stemmer altså overens med $h_k \in G$ i alle tre tilfælde, og Φ er dermed et (X, G) -atlas for M .

Da Φ indeholder alle funktioner, der går fra et hvilket som helst punkt i M og med vilkårlig lille radius, er Φ et maksimal (X, G) -atlas for M . Så M er en 2-mangfoldighed med en (X, G) -struktur.

Vi mangler så bare at vise, at hvis vi lader τ være den naturlige injektive afbildning mellem det indre af en polygon $P \in \mathcal{P}$ (betegnet P°) ind i M , så er τ en (X, G) -afbildning.

Da vi lige har vist at M er en (X, G) -mangfoldighed, har vi at τ er en funktion mellem

(X, G) -mangfoldigheder. For $x \in P^\circ$ svarer afbildningen $\varphi_x : U(x, r) \rightarrow B(x, r)$ så til

$\tau^{-1} : \tau(B(x, r)) \rightarrow B(x, r)$. Da $B(x, r)$ er en åben mængde om $x \in P^\circ$, giver sætning 4.11 at τ er en (X, G) -afbildning for hvert $P \in \mathcal{P}$. □

Vi har lige set hvordan man kan konstruere sfæriske, hyperbolske og euklidiske flader, og vi vil nu se på hvordan der skelnes mellem topologisk forskellige flader.

Første halvdel af dette kapitel vil beskrive en masse topologiske egenskaber ved lukkede flader, og hvordan de skelnes og klassificeres. Det vil være overfladisk i den forstand, at alle tingene postuleres og ikke bevises.

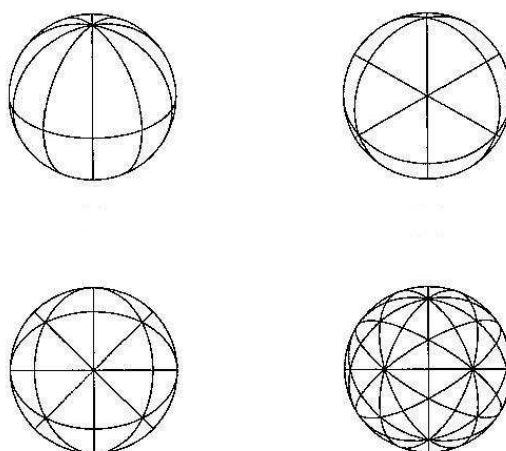
Anden del af kapitlet vil til gengæld udelukkende bestå af beviser - To af slagsen, hvor vi bruger den viden, som vi har opnået tidligere i projektet. Ved at kombinere de topologiske egenskaber ved lukkede flader fra første halvdel af kapitlet med vores geometriske viden fra tidligere i projektet, vil vi vise Gauss-Bonnets sætning, som kobler en flades topologiske og geometriske egenskaber sammen.

5.1 Klassificering af lukkede flader

For en flade, betyder det at være lukket, det samme som at være kompakt (uden rand).

En ungarsk matematiker ved navn Tibor Radó, viste i 1920'erne, at enhver lukket flade, kan deles ind i trekanter. Nogle eksempler på S^2 inddelt i trekanter, kan ses på figur 5.1.

Figur 5.1: Trianguleringer af S^2 .



5.1 Klassificering af lukkede flader

Hvis vi lader Δ betegne en trekant i E^2 (med 0 som det ene hjørne), kan vi skrive en sådan inddeling i trekanter på følgende formelle måde.

Definition 5.1 (Triangulation). Lad M være en lukket flade. En endelig mængde af funktioner, $\Sigma = \{\sigma_i | \Delta \rightarrow M\}_{i \in \mathcal{I}}$ er da en *triangulering* af M , hvis den opfylder følgende 3 betingelser:

- Δ afbildedes af σ_i homeomorft på en mængde T_i , som vi vil kalde en trekant.
En trekant er en delmængde af M , hvis sider og hjørner er billederne af Δ 's sider og hjørner under φ_i .
- $M = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} T_i$
- To forskellige trekanter, $T_i, T_j \in M$, overlapper enten slet ikke, eller har et hjørne eller en side til fælles.

I 1750 opdagede Euler sin berømte polyederformel: Hvis v , e og f er antallet af henholdsvis hjørner, kanter og sideflader i et polyeder, er $v - e + f = 2$.

Men moderne sagt, gælder dette dog kun for polyedere, som er homeomorfe med S^2 og hvis sideflader er homeomorfe med S^1 .

Vi vil nu se på hvordan formlen senere hen er blevet generaliseret, så den ikke kun gælder polyedere, men alle lukkede flader.

Hvis Σ er en triangulering af en lukket flade M , så lader vi v betegne antallet af hjørner, e antallet af kanter og t antallet af trekanter.

Eulerkarakteristikken for M er så tallet $\chi(M) = v - e - t$, som vil være uafhængigt af trianguleringen.

To flader, M_1 og M_2 , kan sættes sammen til en ny flade, ved at fjerne en trekant fra hver af dem, og lime dem sammen her. Den sammensatte flade, $M_1 \# M_2$, vil så have tre færre kanter, tre færre hjørner og to trekanter mindre end det samlede antal for de to flader. Altså en Eulerkarakteristik på: $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.

Hvis det er n tori eller projektive planer vi sætter sammen, kalder vi det en lukket flade af genus n . Men selv om to lukkede flader har samme genus, betyder det ikke at de er homeomorfe.

For at kunne skelne lukkede flader fuldstændigt (op til homeomorfi), har vi brug for endnu en ting udover Eulerkarakteristikken; nemlig orientering.

Σ betegner fortsat en triangulering af en lukket flade M . Hvis vi lader $\Delta \in E^2$ have en bestemt orientering, vil $\sigma_i(\Delta) = T_i$ også have en orientering. Alle trekanterne i M 's triangulering, vil altså have en bestemt orientering, og denne kan vendes, hvis vi udstyrer Δ med modsat orientering. Vi kalder en kant i trianguleringen orienteret, hvis den har modsat orientering i hver af de to trekanter, den er en side af.

M siges at være en orienterbar flade, hvis vi for hvert $i \in \mathcal{I}$ kan vælge en orientering af Δ , så σ_i på Δ gør alle kanterne orienterede.

At være en lukket, orienterbar flade betyder altså at der kan defineres en positiv omløbsretning, som er konsistent på hele fladen. Er dette ikke muligt, er fladen ikke orienterbar, hvilket også kan vises, at være ækvivalent med at fladen indeholder en kopi af et Möbius-bånd.

Hvis M er en lukket, ikke-orienterbar flade, er den en sammensætning af projektive planer. Et kendt eksempel er Klein-flasken, som er en ikke-orienterbar, lukket flade af genus to.

Er M derimod lukket og orienterbar, er den enten en kugle eller en sammensætning af tori. Derfor kalder vi også S^2 for en lukket, orienterbar flade af genus 0.

Genus for en sammenhængende, orienterbar flade kan også ses som antal gange vi højst kan skære den igennem, hvor den stadig forbliver sammenhængende. Med 'at skære igennem', menes der langs lukkede geodæter på fladen, som ikke krydser.

På denne måde, kan S^1 også ses som en flade af genus 0.

Eulerkarakteristikken for en lukket flade, M , er: $\chi(M) = 2 - p \cdot \text{genus}(M)$, hvor $p = 1$ hvis M er orienterbar, og $p = 2$ hvis M ikke er orienterbar. Man kan altså bestemme en flades Eulerkarakteristik ved at tælle dens topologiske 'huller'.

Dette betyder også at en lukket flades Eulerkarakteristik og orienterbarhed klassificerer den fuldstændigt op til homeomorfi. Hvis den er orienterbar er den homeomorf med en kugle eller sammensatte tori, og Eulerkarakteristikken vil bestemme dens genus. Hvis den ikke er orienterbar, vil Eulerkarakteristikken fortælle hvor mange projektive planer den er sammensat af.

Vi kan strække vores viden lidt længere, til at kunne få klassificeret lidt flere end bare de lukkede flader.

Lad som før M være en lukket flade, og lad os forestille os at vi fjerner en eller flere disjunkte diske fra den. Resultatet bliver så, at vi i stedet får en flade, M^* , med en rand bestående af topologiske cirkler.

Flader med rand adskiller sig fra normale flader ved (i stedet for E^2) at være lokalt homeomorfe med det øvre lukkede halvplan; $\overline{U}^n = \{x \in E^2 \mid x_n \geq 0\}$.

Triangulation definerer vi på samme måde for disse flader, og da en trekant er homeomorf med en disk, bliver Eulerkarakteristikken for M^* :

$$\chi(M^*) = \chi(M) - m, \text{ hvor } m \text{ er antallet af fjernede diske.}$$

Hvis vi derudover definerer M^* til at være orienterbar hvis M er det, kan vi også få klassificeret de lukkede flader med rand. To lukkede flader med rand er så homeomorfe, hvis de begge er enten orienterbare eller ej, har samme Eulerkarakteristik, og deres rand består af samme antal topologiske cirkler.

5.2 Gauss-Bonnets sætning

Hvis vi har med en geometrisk, lukket flade at gøre, viser der sig at være en interessant forbindelse mellem dens geometri og dens topologiske egenskaber. Denne forbindelse er i form af fladens Gausskrumning og Eulerkarakteristik, som vi så var meget karakteriserende for fladen.

Det var den franske matematiker, Pierre Ossian Bonnet (1819-1892), der først opdagede og viste sammenhængen i 1848. Efter sigende skulle Gauss også være kommet frem til noget lignende - Han fik i hvert fald udgivet nogle specialtilfælde af følgende sætning, og føjet sit navn til den:

5.2 Gauss-Bonnets sætning

Sætning 5.2 (Gauss-Bonnets sætning). *Lad M være en lukket, geometrisk flade med en konstant krumning, κ , på enten $-1, 0$ eller 1 .*

Så er

$$\kappa \text{Areal}(M) = 2\pi\chi(M)$$

Endnu en ting vi ikke har vist, men vil bruge her, er at enhver lukket flade kan konstrueres ved at lime kanterne sammen på et konvekst polygon på en passende måde. Et sådan polygon for M kalder vi P , og arealet af M er så det samme som arealet af P .

Hvis vi starter med tilfældet, hvor P har 0 sider, så må $P = S^2$. M er altså en kugle, og har derfor et areal på 4π , en krumning på 1 og er en orienterbar flade af genus 0 .

Dvs.

$$\begin{aligned}\kappa \text{Areal}(M) &= 1 \cdot \text{Areal}(S^2) = 4\pi \\ 2\pi\chi(M) &= 2\pi(2 - 1 \cdot \text{genus}(M)) = 4\pi\end{aligned}$$

Så formelen holder i dette tilfælde.

Har P i stedet én side, må den være en lukket halvkugle af S^2 . Så er M ifølge sætning 4.9 den projektive plan, og $\text{Areal}(M) = \text{Areal}(P) = 2\pi$.

Så holder formelen også, da $\chi(P^2) = 1$, og dermed:

$$\kappa \text{Areal}(M) = 1 \cdot 2\pi = 2\pi = 2\pi\chi(M)$$

Hvis P har to sider, må den være en måne af S^2 , da det ellers ikke er muligt for to geodæter at krydse netop to steder. vinklen indenfor P i hvert af de to hjørner må så være skarpt mindre end π , og der findes altså ikke en passende måde at lime siderne sammen på.

Vi rykker derfor videre til det sidste tilfælde, nemlig hvor antallet af sider i P er $e \geq 3$. Ifølge sætning 4.9 er antal sider i P enten en eller et lige tal, så vi kan nøjes med at se på de $e > 3$ som er lige.

Hvis vi nu tager et punkt $x \in P^\circ$, kan vi dele P op i t trekanter ved at lade sider gå fra x til hver af hjørnerne i P . Triangulationen af M vil så have t kanter der indeholder x , samt t halve kanter, som stammer fra P 's sider, der bliver limet sammen to og to. Dvs. $e = t + \frac{1}{2}t$ og dermed er $\chi(M) = v - e + t = v - \frac{1}{2}t$.

Hvis vi først betragter tilfældet, hvor X er en euklidisk flade, så er $\kappa = 0$ og vinkelsummen i hver af trekanterne i trianguleringen er π . Da også P var limet passende sammen, vil den samlede vinkelsum for de t trekanter være $2\pi \cdot v$.

Dvs.

$$2\pi v = \sum_{i=1}^t \text{Areal}(\Delta_i) = \sum_{i=1}^t \pi = t\pi$$

Det betyder at $t = 2v$ og dermed; $\chi(M) = (v - \frac{1}{2}t) = 0$.

$\kappa \text{Areal}(M) = 2\pi\chi(M)$ er altså opfyldt.

Hvis i stedet $\kappa = 1$ eller -1 , ved vi at der for arealet af hver af trekkanterne, gælder at

$$\kappa Areal(\Delta_i) = (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) \text{ (sætning 2.27 og 2.31).}$$

Dette giver os at

$$\begin{aligned} \kappa Areal(M) &= \kappa Areal(P) = \kappa \sum_{i=1}^t Areal(\Delta_i) = \sum_{i=1}^t (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) = 2\pi v - t\pi = 2\pi(v - \frac{1}{2}t) \\ &= 2\pi\chi(M) \end{aligned}$$

Så det er vist at

$$\kappa Areal(M) = 2\pi\chi(M).$$

□

Sætning 5.3. *Hvis M er en lukket flade, kan dens Eulerkarakteristik sige følgende om fladens struktur:*

- (1) M har sfærisk struktur hvis og kun hvis $\chi(M) > 0$
- (2) M har euklidisk struktur hvis og kun hvis $\chi(M) = 0$
- (3) M har hyperbolsk struktur hvis og kun hvis $\chi(M) < 0$

Bevis: (1) Hvis vi antager $\chi(M) > 0$, så må M enten være en orienterbar flade af genus 0, eller en ikke orienterbar flade af genus en, da $\chi(M) = 2 - p \cdot \text{genus}(M)$. Dvs. M enten er en kugle eller en projektiv plan, som begge har en sfærisk struktur.

Hvis vi i stedet antager at M har en sfærisk struktur, så er $\kappa = 1$ og dermed må $0 < \kappa Areal(M) = 2\pi\chi(M)$, så vi har at $\chi(M) > 0$.

(2) Er $\chi(M) = 0$, er M en orienterbar flade af genus én, eller en ikke orienterbar af genus to. M er altså en torus eller en kleinflaske, som begge har euklidisk struktur.

Antages det omvendt at M har euklidisk struktur, så er $\kappa = 0$ og dermed er også $\chi(M) = 0$ ifølge sætning 5.2.

(3) Hvis $\chi(M)$ er negativ, må M være en orienterbar flade af genus mindst to, eller en ikke orienterbar flade af genus mindst en. Alle disse har hyperbolsk struktur og dermed har M det.

Antager vi i stedet at M har hyperbolsk struktur, så har den en negativ krumning og ved sætning 5.2 er dens Eulerkarakteristik negativ. □

Litteratur

- [JR] Ratcliffe, John G.; *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer, anden udgave 2006.
- [EK] Kristensen, Erik; *Ikke-euklidisk geometri*, Gads forlag, 1975.
- [PM] Prékopa, András og Molnár, Emil; *Non-Euclidean Geometries*, Springer, 2006.
- [SK] Kulczycki, Stefan; *Non-Euclidean Geometry*, Dover, 2008, først udgivet i 1961.