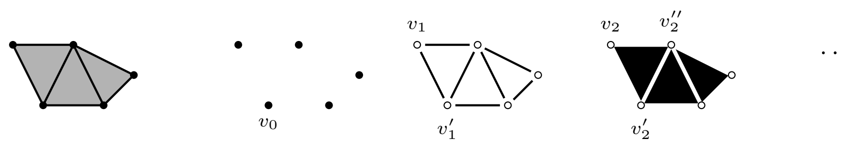
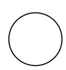
DEN ØVRE GRÆNSE SÆTNING FOR SIMPLICIALE SFÆRER

ISABELLE LAUDE

$$\Delta = \{\emptyset \;,\; \overbrace{\{v_0\},\dots}^{n_0} \;,\; \overbrace{\{v_1, v_1'\},\dots}^{n_1} \;,\; \overbrace{\{v_2, v_2', v_2''\},\dots}^{n_2} \;,\; \overset{\cdots}{\cdots} \;\}$$



$\Delta \cong S^1 =$  $\implies$ $n_1 \leq n_0$

$\Delta \cong S^2 =$  $\implies$ $n_1 \leq 3(n_0 - 2)$, $n_2 \leq 2(n_0 - 2)$

$\vdots$

$\Delta \cong S^n \implies \forall j \leq n.\ n_j \leq C(n_0, n+1)$

Vejleder: Alexander Berglund

Afleveret: 26-03-2010

Bachelorprojekt i matematik. Institut for matematiske fag, Københavns Universitet

Bachelor Thesis in Mathematics. Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen

Resume

For et simplicialt kompleks på et givent antal knuder, der udgør en triangulering af en sfære af en fast dimension, vil antallet af sider af en given dimension være opad begrænset af antallet af sider af denne dimension i en cyklisk polytop. Dette resultat kaldes den *øvre grænse sætning* for simpliciale sfærer og blev oprindeligt vist af Stanley.

Projektet består af et udførligt bevis for den øvre grænse sætning for simpliciale sfærer og vil involvere både kombinatorik, algebra og topologi. Centralt i beviset er at til et simplicialt kompleks at associere Stanley-Reisnerringen, da hovedsætningen i stor grad afhænger af at kunne afgøre, hvornår Stanley-Reisnerringen er Cohen-Macaulay. Ved at benytte lokal kohomologi af ringen, simplicial homologi af komplekset og singlær homologi af den geometriske realisation bliver det vist, at man alene på baggrund af den geometriske realisation kan afgøre om dette er tilfældet.

Abstract

Given a simplicial complex on a given number of vertices, which forms a triangulation of a sphere of a fixed dimension, the number of faces of a given dimension will be bounded from above by the number of faces of this dimension in a cyclic polytope. This is known as the *upper bound theorem* for simplicial spheres, which was originally proven by Stanley.

This project consists of a comprehensive proof of the upper bound theorem for simplicial spheres, and will draw on results from the fields of combinatorics, algebra, and topology. A key part of the proof relies on associating the Stanley-Reisner ring to a given simplicial complex, as the main theorem to a large degree depends on being able to decide when the Stanley-Reisner ring is Cohen-Macaulay. By using local cohomology of the ring, simplicial homology of the complex, and singular homology on the geometric realisation, it it shown that this can be determined purely on the basis of the geometric realisation.

Indhold

Introduktion

Hovedsætningen i dette projekt er, at for simpliciale komplekser på n knuder, som udgør en triangulering af en $(d-1)$-dimensionel sfære, vil antallet af sider i Δ af dimension i være opad begrænset af antallet af sider af dimension i i en cyklisk polytop af type $C(n,d)$. Denne kaldes den øvre grænse sætning for simpliciale sfærer og blev vist af Stanley i 1975[10].

I 1957 formodede Motzkin et lignede resultat om polytoper: for d-polytoper med n hjørner vil maksimum af antallet af sider af dimension i blive realiseret i en cyklisk polytop af type $C(n,d)$. Dette blev vist af McMullen i 1970[7]. Hvis der for et simplicialt kompleks med $|\Delta| \cong S^{d-1}$ gælder, at $|\Delta|$ er randkomplekset af en d-polytop, følger påstanden umiddelbart fra den øvre grænsesætning for polytoper. Det blev vist af Grünbaum, at der findes simpliciale komplekser, hvis geometriske realisation er en sfære, men som ikke kan beskrives som randkomplekser af en polytop. Af et resultat af Kalai[6] følger, at for størstedelen af disse simpliciale komplekser, vil dette være tilfældet. Motiveret af dette resultat foreslog Klee i 1964 den øvre grænse sætning for simpliciale sfære, og denne kan således betragtes som en vigtig udvidelse af resultatet for polytoper.

Centralt for både Stanleys bevis og beviset i dette projekt er, at til et simplicialt kompleks kan associeres både en Noethersk ring kaldet Stanley-Reisnerringen og et topologisk rum kaldet den geometriske realisation. Beviset trækker på flere forskellige grene af matematikken svarende til strukturen af disse objekter. Således benyttes resultater fra kommutativ og homologisk algebra til at vise, at den øvre grænse sætning afhænger af ringteoretiske egenskaber ved Stanley-Reisnerringen og kombinatoriske egenskaber ved det simpliciale kompleks. På baggrund af algebraisk topologi sluttes, at disse egenskaber kun afhænger af topologiske invarianter ved den geometriske realisation.

Bevistrategien i dette projekt, er først at definere Stanley-Reisnerringen og via Hochsters sætning at vise en sammenhæng mellem lokal kohomologi af ringen og simplicial homologi af visse delkomplekser. Dette benyttes til at vise, at Stanley-Reisnerringen er Cohen-Macaulay ligeledes kun afhænger af simplicial homologi af delkomplekser. Efterfølgende beskrives cykliske polytoper og antallet af sider i disse. Dette benyttes til at vise, at Cohen-Macaulay- og Eulerkomplekser vil opfylde den øvre grænse sætning. Herefter bevises, at spørgsmål om et simplicialt kompleks er et Cohen-Macaulay- og Eulerkomplekser, kan afgøres alene på baggrund af den singulære homologi af den geometriske realisation.

Der vil i projektet blive antaget kendskab til grundlæggende dele af kommutativ algebra, homologisk algebra, topologi og algebraisk topologi. Disse er blandt andet beskrevet i [11],[3] og [5], og den anvendte notation stammer derfra.

Fremstillingen i dette projekt er i hovedtræk baseret på [2], med undtagelse af Kapitel 5 og Kapitel 7.1 som er inspireret af [5] henholdvis [1]. Enkelte ideer stammer derudover fra [9]. Der er dog tale om en en gennemgående omstrukturering af materialet, hvor detaljer, hjælpelemmaer samt eksempler er blevet tilført. Beviserne i kapitel A, C samt afsnit 1.2, 1.3 og 4.2 er udarbejdet af forfatteren.

Oversigt

Af hensyn til læseren følger nu en kort oversigt af projektet. I kapitel 1 vil simpliciale komplekser og den tilhørende Stanley-Reisnerringen blive defineret. Efterfølgende vil fokus være på graduering og Krull-dimension af denne ring. Kapitel 2 er en kort gennemgang af lokal kohomologi, som i Kapitel 3 anvendes på Stanley-Reisnerringen. I Kapitel 4 vil man benytte lokal kohomologi til at vise, at Cohen-Macaulaykomplekser kan beskrives ved hjælp af simplicial homologi. Kapitel 5 består af en kort opsummering af generel teori om polytoper og en efterfølgende gennemgang af cykliske polytoper. Resultaterne om cykliske polytoper benyttes i

Kapitel 6 sammen med egenskaber ved gradueringen på Stanley-Reisnerringen til at vise den øvre grænse sætning for en særlig type komplekser. I Kapitel 7 vil topologi spille en central rolle, da geometrisk realisation defineres og sammenhængen mellem singulær homologi af dette og komplekserne fra Kapitel 6 vises. Ved at benytte kendskabet til singulær homologi for sfærer vil hovedsætningen blive bevist.

Bilag A er en kort gennemgang af de ringteoriske begreber, som vil være centrale i projektet. Bilag B er en uddybningen af visse påstande fra Kapitel 2. Bilag C indeholder beregninger af simplicial homologi for forskellige typer af komplekser, som anvendes flere steder i projektet.

Der er i projektet blivet prioriteret, at der ikke anvendes teori, som ikke på det givne tidspunkt er blevet introduceret.

1. Stanley-Reisnerringe

Efter definitionen af Stanley-Reisnerringe vil fokus være på en række ringteoriske egenskaber ved denne. Der afsluttes med definitionen af h-vektoren, som udgør en central forbindelse mellem de kombinatoriske egenskaber ved det simpliciale kompleks og egenskaber ved den tilhørende Stanley-Reisnerring.

1.1. Simpliciale komplekser og Stanley-Reisnerringe.

Definition 1.1.1. *Lad $n \in \mathbb{N}$ og $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Et simplicialt kompleks Δ på V er en ikke-tom delmængde af potensmængden $\mathcal{P}(V)$, som er nedadtil afsluttet med hensyn til inklusion. Et simplicialt kompleks Δ opfylder således, at hvis $F \in \Delta$ og $G \subseteq F$, vil $G \in \Delta$. Et delkompleks af Δ er en delmængde af Δ, som selv udgør et simplicialt kompleks.*

Elementerne i Δ betegnes for sider, og en side i Δ kaldes maksimal, hvis den er maksimal med hensyn til inklusion. For $F \in \Delta$ defineres dimensionen af F ved $\dim F = |F| - 1$. Dimensionen af det simpliciale kompleks Δ sættes til

$$\dim \Delta = \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}.$$

Antallet af sider i Δ af dimension i betegnes $f_i(\Delta)$, og f-vektoren for Δ er følgende:

$$f(\Delta) = (f_{-1}(\Delta), f_0(\Delta), \dots, f_{\dim \Delta}(\Delta)).$$

Bemærk, at denne definition altid medfører, at $\emptyset \in \Delta$. Da $\Delta \neq \emptyset$, findes nemlig $F \in \Delta$, og idet $\emptyset \subseteq F$, følger det ønskede. Da den tomme mængde har dimension -1 og er den eneste, som opfylder dette, vil $f_{-1}(\Delta) = 1$ for ethvert simplicialt kompleks. I det efterfølgende vil ethvert simplicialt kompleks være et simplicialt kompleks på $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, hvor $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1.1.2. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og k et legeme. Stanley-Reisnerringen $k[\Delta]$ for Δ med hensyn til k er $k[\Delta] = k[X_1, \dots, X_n]/I_\Delta$, hvor I_Δ er idealet i $k[X_1, \dots, X_n]$ frembragt af*

$$\left\{ \prod_{v_i \in A} X_i \;\middle|\; A \subseteq V \text{ hvor } A \notin \Delta \right\}.$$

Bemærk, at da $\emptyset \in \Delta$, vil I_Δ enten være nulidealet eller frembragt af monomier af positiv grad.

1.2. Idealer i en polynomiumsring frembragt af monomier.

Motiveret af definitionen af Stanley-Reisnerringen undersøges nu idealer i en generel polynomiumsring, som er frembragt af monomier.

Lad k være et legeme. For et $m \in \mathbb{N}$ lad R være polynomiumsringen $k[X_1, \dots, X_m]$. Lad $\mathbb{N}_0$ være de ikke-negative hele tal, altså $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. For $\alpha = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{N}_0^m$ benyttes konventionen, at $X^\alpha = X_1^{a_1} \cdots X_m^{a_m}$. Sæt $\mathscr{M} = \{X^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^m\}$, hvorved $\mathscr{M}$ er mængden af monomier i R. For $u, v \in \mathscr{M}$ kaldes u en divisor i v, betegnet

$u \mid v$, hvis der findes $w \in \mathscr{M}$, så $uw = v$. Med hensyn til division af monomier er mindste fælles multiplum defineret som det monomium af mindst mulig grad, der er et multiplum af de betragtede monomier.

Et polynomium i R kan skrives som en k-linearkombination af monomier. Således vil der for $a \in R$ forskellig fra nulpolynomiet findes $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in k$ og $w_1, \ldots, w_N \in \mathscr{M}$, så

$$a = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i w_i.$$

Hvis der antages, at monomierne $w_1, \ldots, w_N$ er forskellige, og $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ ikke er nul, vil sådan en fremstilling af a være entydig op til omnummerering af indeks. Monomierne $w_1, \ldots, w_N$ kaldes i det tilfælde monomierne forekommende i a.

Lemma 1.2.1. *Lad I være et ideal i R frembragt af $\mathcal{F}_I \subseteq \mathscr{M}$. For $a \in I$ gælder der, at hvis $w \in \mathscr{M}$ forekommer i a, findes $u \in \mathcal{F}_I$, så u er divisor i w. Specielt vil $w \in I$.*

Bevis. Et $a \in I$ kan herved skrives som en endelig R-kombination af elementer fra $\mathcal{F}_I$. Da polynomierne i R er endelige k-kombinationer af monomierne, sluttes, at for $a \in I$ findes $s \in \mathbb{N}$, så

$$a = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j v_j u_j, \quad \text{hvor } \lambda_j \in k, v_j \in \mathscr{M}, u_j \in \mathcal{F}_I.$$

Da to polynomier er ens, netop hvis de har de samme led, følger det at ethvert monomium forekommende i a, også forekommer i summen på højre side. Monomierne forekommende i a har herved formen vu, hvor u og v begge er monomier og $u \in \mathcal{F}_I$. Da $u \in I$, vil monomierne forekommende i a også være elementer i I. □

Af ovenstående lemma følger direkte:

Korollar 1.2.2. *Lad I være et ideal i R frembragt af monomier. Da gælder, at $a \in I$ hvis og kun hvis ethvert monomium forekommende i a ligger i I.*

1.3. **Krull-dimension af Stanley-Reisnerringe.** Det interessante vil nu være at undersøge sammenhængen mellem Krull-dimensionen af $k[\Delta]$ og dimensionen af Δ. For at gøre dette indføres først lidt notation:

Definition 1.3.1. *Lad k være et legeme. For $A \subseteq V$, lad $\mathfrak{B}_A$ være idealet i $k[X_1, \ldots, X_n]$ frembragt af X_j, for hvilke $v_j \notin A$.*

Med denne notation haves følgende sammenhæng:

Lemma 1.3.2. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og k et legeme. For $A \subseteq V$ gælder:*

$$I_\Delta \subseteq \mathfrak{B}_A \iff A \in \Delta.$$

Bevis. Først behandles to specialtilfælde. Hvis $A = \emptyset$ er $\mathfrak{B}_\emptyset = (X_1, \ldots, X_n)$. Da I_Δ enten er frembragt af monomier med positiv grad eller er nulidealet, vil der altid gælde, at $I_\Delta \subseteq \mathfrak{B}_\emptyset$. Som bemærket, vil $\emptyset \in \Delta$, så påstanden er triviel opfyldt for den tomme mængde. Der haves, at $\mathfrak{B}_V$ er nulidealet. Tilsvarende, hvis $V \in \Delta$, vil $\Delta = \mathcal{P}(V)$ per definition. Lemmaet er for $A = V$ ækvivalent med følgende påstand:

$$I_\Delta = 0 \iff \Delta = \mathcal{P}(V).$$

Dette er klart, da idealet I_Δ er nulidealet netop når enhver mulig side af Δ er realiseret. Antag derfor i det følgende, at $A \subseteq V$ er forskellig fra $\emptyset$ og V.

Antag, at $I_\Delta \subseteq \mathfrak{B}_A$ og med henblik på modstrid, at $A \notin \Delta$. Per definition vil monomiet $\prod_{v_i \in A} X_i \in I_\Delta$, og således haves, at $\prod_{v_i \in A} X_i \in \mathfrak{B}_A$. Da idealet $\mathfrak{B}_A$ er frembragt af en ikke tom mængde af monomier, resulterer Lemma 1.2.1 i, at der findes $1 \leq j \leq n$, så $v_j \notin A$ og $X_j \mid \prod_{v_i \in A} X_i$. Af dette konkluderes, at $v_j \in A$ og en modstrid fremkommer.

Antag, at $A \in \Delta$. Der skal vises, at $I_\Delta \subseteq \mathfrak{P}_A$. Det er nok at vise, at enhver frembringer for I_Δ er et element i $\mathfrak{P}_A$. En frembringer for I_Δ har formen $\prod_{v_j \in B} X_j$, hvor $B \subseteq V$, som opfylder $B \notin \Delta$. Da $A \in \Delta$, sluttes nu direkte, at $B \nsubseteq A$. Herved konkluderes, at der findes $j \in \{1, \ldots, n\}$, så $v_j \in B$ og $v_j \notin A$. Da vil $X_j \in \mathfrak{P}_A$, hvorfor $\prod_{v_j \in B} X_j \in \mathfrak{P}_A$. □

Sætning 1.3.3. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og k et legeme. Da vil*

$$I_\Delta = \bigcap_{\substack{F \in \Delta, \\ F \text{ maksimal side}}} \mathfrak{P}_F.$$

Bevis. For at forenkle notationen lad J være idealet i $k[X_1, \ldots, X_n]$ på højre side af lighedstegnet i lemmaet. Af Lemma 1.3.2 følger, at for en maksimal side $F \in \Delta$, vil $I_\Delta \subseteq \mathfrak{P}_F$, hvorved der haves, at $I_\Delta \subseteq J$.

Betragt $f \in J$. Da vil der for enhver maksimal side $F \in \Delta$ gælde, at $f \in \mathfrak{P}_F$. Da $\mathfrak{P}_F$ er frembragt af monomier, er dette jævnfør Korollar 1.2.2 ækvivalent med, at ethvert monomium u forekommende i f, opfylder, at $u \in \mathfrak{P}_F$. Lad u være et monomium forekommende i f og $F \in \Delta$ være maksimal. Da vil $u \in \mathfrak{P}_F$, hvorfor der af Lemma 1.2.1 følger, at der findes $v_{j_F} \notin F$, så $X_{j_F} \mid u$. Betragt

$$V' = \{v_{j_F} \mid F \in \Delta \text{ maksimal}\} \subseteq V.$$

Antag $V' \in \Delta$. Da ville der findes en maksimal side $F' \in \Delta$, så $V' \subseteq F'$. Idet $v_{j_{F'}} \in V'$, ville $v_{j_{F'}} \in F'$ i modstrid med antagelserne. Herved følger, at $V' \notin \Delta$. Defineres

$$u' = \prod_{v_i \in V'} X_i,$$

vil $u' \in I_\Delta$. For $v_j \in V'$ haves, at $X_j \mid u$, hvorfor der sluttes, at det mindste fælles multiplum af X_j for $v_j \in V'$, må være en divisor i u. Dette er netop u', så der konkluderes, at $u' \mid u$ og således vil $u \in I_\Delta$. Herved vil ethvert monomium forekommende i f ligge i I_Δ, så der sluttes, at $f \in I_\Delta$. □

Sætning 1.3.4. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og k et legeme. Da vil Krull-dimensionen* $\dim k[\Delta] = \dim \Delta + 1$.

Bevis. Lad $F = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\} \in \Delta$, hvor $s \in \mathbb{N}_0$. For $1 \leq t \leq s$ defineres $F_t = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_t}\}$ og $F_0 = \emptyset$. Da vil $F_t \subseteq F$ for $0 \leq t \leq s$, så $F_t \in \Delta$ for alle $0 \leq t \leq s$. For et $t \in \{1, \ldots, s\}$ vil $F_{t-1} \subsetneq F_t$, hvorfor det af definitionen følger, at $\mathfrak{P}_{F_t} \subsetneq \mathfrak{P}_{F_{t-1}}$.

For $t \in \{0, \ldots, s\}$ er ringen $k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{P}_{F_t}$ isomorf med polynomiumsringen $k[Y_1, \ldots, Y_t]$. Da k er et legeme, er dette et integritetsområde. Ergo der sluttes, at $\mathfrak{P}_{F_t} \in \operatorname{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n])$ for $t \in \{0, \ldots, s\}$. På baggrund af Lemma 1.3.2 haves, at $I_\Delta \subseteq \mathfrak{P}_{F_t}$ for alle $0 \leq t \leq s$. Herved vil

$$\mathfrak{P}_F/I_\Delta = \mathfrak{P}_{F_s}/I_\Delta \subsetneq \mathfrak{P}_{F_{s-1}}/I_\Delta \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_{F_1}/I_\Delta \subsetneq \mathfrak{P}_{F_0}/I_\Delta. \tag{1}$$

være en kæde af primidealer i $k[\Delta]$ af længde $s = |F| = \dim F + 1$. Heraf konkluderes, at

$$\dim k[\Delta] \geq \max\{\dim F + 1 \mid F \in \Delta\} = \dim \Delta + 1.$$

Antag, at der gælder, at $\dim k[\Delta] > \dim \Delta + 1$. Da findes en kæde af primidealer i $k[\Delta]$ af længde $j > \dim \Delta + 1$. Denne svarer til en kæde

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{j-1} \subsetneq \mathfrak{p}_j$$

af primidealer i $k[X_1, \ldots, X_n]$ af længde j, hvor $I_\Delta \subseteq \mathfrak{p}_0$. Af Sætning 1.3.3 følger, at

$$\mathfrak{p}_0 \supseteq I_\Delta = \bigcap_{\substack{F \in \Delta \\ F \text{ maksimal}}} \mathfrak{P}_F \supseteq \prod_{\substack{F \in \Delta \\ F \text{ maksimal}}} \mathfrak{P}_F.$$

Da $\mathfrak{p}_0$ er et primideal følger af [11, RM (4.8)], at der findes en maksimal side $F \in \Delta$, så $\mathfrak{B}_F \subseteq \mathfrak{p}_0$. Ved passende nummerering, er da $\mathfrak{B}_F = (X_{j_1}, \dots, X_{j_r})$, hvor $r = n - |F|$. Bemærk, at $r \geq n - (\dim \Delta + 1)$. Herved er

$$0 \subsetneq (X_{j_1}) \subsetneq (X_{j_1}, X_{j_2}) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_{j_1}, \dots, X_{j_{r-1}}) \subsetneq \mathfrak{B}_F \subseteq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_j,$$

en kæde af primidealer i $k[X_1, \dots, X_n]$ af længde mindst

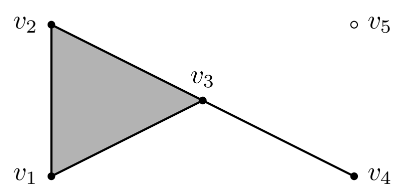
$$r + j > n - (\dim \Delta + 1) + \dim \Delta + 1 = n.$$

Dette er i modstrid med, at polynomiumsringen $k[X_1, \dots, X_n]$ har Krull-dimension n. Herved konkluderes, at $\dim k[\Delta] = \dim \Delta + 1$. □

Eksempel 1.3.5. *Lad* $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *og*

$$\Delta = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}$$

som kan kan visualiseres ved figur 1. Bemærk, at der i V *forekommer et element,*



FIGUR 1. Det simpliciale kompleks Δ.

som ikke realiseres i Δ*, symboliseret ved spøgelsesknuden for* v_5*. Da er* $\dim \Delta = 2$ *og* $f(\Delta) = (1, 4, 4, 1)$*. De maksimale sider i* Δ *er* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *og* $\{v_3, v_4\}$*. Hvis* k *er et legeme vil i henhold til Lemma 1.3.3*

$$I_\Delta = (X_4, X_5) \cap (X_1, X_2, X_5) = (X_1X_4, X_2X_4, X_5).$$

Stanley-Reisnerringen $k[\Delta] = k[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]/I_\Delta$ *har jævnfør Sætning 1.3.4 Krull-dimension 3. Der bemærkes, at* $X_5 \in I_\Delta$ *svarende til den ikke-realiserede knude* v_5*. Hvis man istedet betragter* Δ *som simplicialt kompleks på* $V \setminus \{v_5\}$ *vil idealet* I_Δ *være* (X_1X_4, X_2X_4) *og de to Stanley-Reisnerringe er således isomorfe.*

For senere at kunne afgøre hvornår Stanley-Reisnerringen er Cohen-Macaulay, vil kendskabet til følgende Krull-dimension være centralt:

Korollar 1.3.6. *Lad* Δ *være et simplicialt kompleks på* V *og* k *et legeme. Lad* x_i *betegne restklassen af* X_i *i* $k[\Delta]$ *og lad* $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$*. Da gælder, at Krull-dimensionen af brøkringen* $k[\Delta]_\mathfrak{m}$ *er* $\dim \Delta + 1$.

Bevis. Sæt $R = k[\Delta]$ og $\dim \Delta = d - 1$. Da $R/\mathfrak{m} \cong k$, vil $\mathfrak{m}$ være et maksimalideal, hvorfor lokaliseringen er veldefineret. Der gælder, at

$$\operatorname{Spec} R_\mathfrak{m} = \{\mathfrak{p}_\mathfrak{m} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R), \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}\},$$

hvorfor $\dim R_\mathfrak{m} \leq \dim R$. Af Sætning 1.3.4 følger nu, at $\dim R_\mathfrak{m} \leq d$.

Lad $F \in \Delta$. Primidealer i R fra (1) er alle indeholdt i $\mathfrak{m}$. Af Lokaliseringsprincippet følger, at der ved lokalisering i $\mathfrak{m}$ fremkommer en kæde af primidealer i $R_\mathfrak{m}$ af samme længde som (1), nemlig $\dim F + 1$. Herved følger, at

$$\dim R_\mathfrak{m} \geq \max\{\dim F + 1 \mid F \in \Delta\} = d.$$ □

1.4. **Graduerede Stanley-Reisnerringe.** Lad i det følgende Δ være et simplicialt kompleks på V og k et legeme. Teorien om graduerede ringe fra Kapitel A vil nu blive anvendt på Stanley-Reisnerringen. Inspireret af Eksempel A.1.2 vil $k[\Delta]$ blive udstyret med både en $\mathbb{Z}^n$-graduering og en $\mathbb{Z}$-graduering og de tilsvarende Hilbertserier vil blive beregnet. I begge tilfælde vil det være af betydning, at Stanley-Reisnerringen er en *lokal ring og Hilbertserien ikke afhænger af k.

Gradueringen af polynomiumsringen i det pågældende eksempel er baseret på at monomierne udgør en k-basis for ringen. For at overføre dette resultat til Stanley-Reisnerringen, vil der først blive undersøgt hvornår et monomium er et element i I_Δ. Til dette defineres:

Definition 1.4.1. *For* $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ *defineres* $\operatorname{Supp}\alpha = \{v_i \mid a_i > 0\}$.

Lemma 1.4.2. *For* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *gælder, at* $X^\alpha \in I_\Delta$ *hvis og kun hvis* $\operatorname{Supp}\alpha \notin \Delta$.

Bevis. Hvis $\operatorname{Supp}\alpha \notin \Delta$, vil $u = \prod_{v_i \in \operatorname{Supp}\alpha} X_i \in I_\Delta$. Der gælder, at $u \mid X^\alpha$, hvorfor $X^\alpha \in I_\Delta$.

Hvis $X^\alpha \in I_\Delta$ følger af Lemma 1.2.1, at der findes $A \subseteq V$, så $A \notin \Delta$ og $\prod_{v_i \in A} X_i \mid X^\alpha$. Heraf sluttes, at $A \subseteq \operatorname{Supp}\alpha$. Antag, at $\operatorname{Supp}\alpha \in \Delta$. Da Δ er et simplicialt kompleks giver ovenstående direkte, at $A \in \Delta$, hvilket er i modstrid med antagelserne. Herved sluttes, at $\operatorname{Supp}\alpha \notin \Delta$. □

Med x_i betegnes restklassen af X_i i $k[\Delta]$. For $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ benyttes konventionen, at $x^\alpha = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$. Da I_Δ er frembragt af monomier, er det en umiddelbar konsekvens af Lemma 1.4.2 og Korollar 1.2.2, at

$$\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \operatorname{Supp}\alpha \in \Delta\}$$

udgør en k-basis for $k[\Delta]$. Defineres for $\alpha \in \mathbb{Z}^n$

$$k[\Delta]_\alpha = \begin{cases} \{cx^\alpha \mid c \in k\} & \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \operatorname{Supp}\alpha \in \Delta \\ 0 & \text{ellers} \end{cases},$$

vil dette således være en $\mathbb{Z}^n$-graduering af $k[\Delta]$. For at beregne Hilbertserien benyttes følgende lemma:

Lemma 1.4.3. *For alle* $m \in \mathbb{N}$ *er*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \boldsymbol{t}^\alpha = \prod_{i=1}^m \frac{t_i}{1 - t_i}$$

Bevis. Lemmaet følger let ved induktion efter m. □

Sætning 1.4.4. *Med den givne* $\mathbb{Z}^n$*-graduering på* $k[\Delta]$ *er Hilbertserien*

$$\mathcal{H}_{k[\Delta]}(\boldsymbol{t}) = \sum_{F \in \Delta} \prod_{v_i \in F} \frac{t_i}{1 - t_i}.$$

Bevis. Af Lemma 1.4.2 følger, at for et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ med $\operatorname{Supp}\alpha \in \Delta$, vil $x^\alpha \neq 0$. Herved konkluderes, at

$$\mathcal{H}(k[\Delta], \alpha) = \dim_k k[\Delta]_\alpha = \begin{cases} 1 & \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \operatorname{Supp}\alpha \in \Delta \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Ergo

$$\mathcal{H}_{k[\Delta]}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{H}(k[\Delta], \alpha) \boldsymbol{t}^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \operatorname{Supp}\alpha \in \Delta}} \boldsymbol{t}^\alpha = \sum_{F \in \Delta} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \operatorname{Supp}\alpha = F}} \boldsymbol{t}^\alpha.$$

Der vil nu blive vist, at for $F \in \Delta$, er

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \operatorname{Supp}\alpha = F}} \boldsymbol{t}^\alpha = \prod_{v_i \in F} \frac{t_i}{1 - t_i}, \tag{2}$$

hvoraf sætningen følger direkte. Hvis $|F| = 0$, er $F = \emptyset$. Der gælder for $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$, at $\operatorname{Supp}\alpha = \emptyset$ hvis og kun hvis $a_i = 0$ for alle $1 \leq i \leq n$. Ergo

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \operatorname{Supp}\alpha = \emptyset}} \boldsymbol{t}^\alpha = t_1^0 \cdots t_n^0 = 1 = \prod_{v_i \in \emptyset} \frac{t_i}{1 - t_i},$$

idet det tomme produkt per konvention er lig 1.

Hvis $|F| > 0$, fremkommer der en bijektiv korrespondance mellem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ med $\operatorname{Supp}\alpha = F$ og $\beta \in \mathbb{N}^{|F|}$ ved at se bort fra elementerne i α, som er nul. Ligningen (2) er herved en umiddelbar konsekvens af Lemma 1.4.3. □

Der defineres for $i \in \mathbb{Z}$:

$$k[\Delta]_i = \begin{cases} \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f \text{ homogent}, \deg f = i\} & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases}.$$

Ovenstående er alle k-vektorrum, og da produktet af to homogene polynomier af grad i og j er et homogent polynomium af grad $i + j$ følger let, at dette udgør en $\mathbb{Z}$-graduering af $k[\Delta]$.

Sætning 1.4.5. *Med hensyn til den givne $\mathbb{Z}$-graduering af $k[\Delta]$ er Hilbertserien:*

$$\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t) = \sum_{i=-1}^{\dim\Delta} \frac{f_i(\Delta) t^{i+1}}{(1-t)^{i+1}}.$$

Bevis. For $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ defineres $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$. Lad $i \in \mathbb{N}_0$. Da I_Δ er frembragt af monomier, er det en umiddelbar konsekvens af Lemma 1.4.2 og Korollar 1.2.2, at

$$\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| = i, \operatorname{Supp}\alpha \in \Delta\}$$

udgør en k-basis for $k[\Delta]_i$, mens $k[\Delta]_i$ er nuldimensional for $i < 0$. Herved følger, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ vil

$$\dim_k k[\Delta]_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n, |\alpha| = i} \dim_k k[\Delta]_\alpha.$$

På baggrund af dette se, at

$$\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k k[\Delta]_i t^i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} t^i \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n, |\alpha| = i} \dim_k k[\Delta]_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \dim_k k[\Delta]_\alpha t^{|\alpha|}.$$

Herved konkluderes, at Hilbertserien for $k[\Delta]$ med hensyn til $\mathbb{Z}$-gradueringen fremkommer ved at erstatte t_i med t i Hilbertserien for $k[\Delta]$ med hensyn til $\mathbb{Z}^n$-gradueringen. På baggrund af Sætning 1.4.4 følger nu, at

$$\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t) = \sum_{F \in \Delta} \frac{t^{|F|}}{(1-t)^{|F|}} = \sum_{F \in \Delta} \frac{t^{\dim F + 1}}{(1-t)^{\dim F + 1}} = \sum_{i=-1}^{\dim\Delta} \frac{f_i(\Delta) t^{i+1}}{(1-t)^{i+1}}.$$ □

For de givne $\mathbb{Z}$- og $\mathbb{Z}^n$-gradueringer af Stanley-Reisnerringen følger:

Lemma 1.4.6. *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V, og lad k være et legeme. Lad x_i betegne restklassen af X_i i $k[\Delta]$ for $1 \leq i \leq n$ og sæt $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$. Da er $(k[\Delta], \mathfrak{m})$ en *lokal ring.*

Bevis. I begge tilfælde vil $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ være et ideal frembragt af homogene elementer $k[\Delta]$, hvorved $\mathfrak{m}$ er et gradueret ideal. De homogene elementer er indeholdt i $k \cup \mathfrak{m}$, så det følger, at ethvert ægte gradueret ideal er indeholdt i $\mathfrak{m}$. Således vil $(k[\Delta], \mathfrak{m})$ være en *lokal ring. □

1.5. **h-vektoren.** Til et simplicialt kompleks tilknyttes endnu en vektor kaldet h-vektoren. Den indeholder de samme informationer som f-vektoren, men er i beregningssammenhænge mere nyttig.

Lemma 1.5.1. *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V af dimension $d-1$ og lad k være et legeme. Med hensyn til $\mathbb{Z}$-gradueringen af $k[\Delta]$, vil $\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t)(1-t)^d$ være et polynomium i $\mathbb{Z}[t]$ af grad højst d. Ydermere gælder der, at hvis $h_j(\Delta)$ betegner koefficienten til t^j for et $0 \leq j \leq d$, da vil*

$$h_j(\Delta) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{d-i}{j-i} f_{i-1}(\Delta).$$

Bevis. Af Sætning 1.4.5 følger, at der gælder

$$\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t)(1-t)^d = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(\Delta) t^i (1-t)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(\Delta) \sum_{k=0}^{d-i} \binom{d-i}{k} t^{i+k} (-1)^k.$$

Heraf haves, at $\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t)(1-t)^d$ er et polynomium af grad højst d, og ved sammenligning af koefficienter fremkommer det ønskede. □

Bemærkning 1.5.2. *For et simplicialt kompleks Δ på V af dimension $d-1$ og et legeme k, er $k[\Delta]$ blevet udstyret med en $\mathbb{Z}$-graduering. Denne opfylder, at $k[\Delta]_i = 0$ for alle $i < 0$. Da $k[\Delta] \neq 0$ og som vist har dimension d, følger det af den generelle teori for Hilbertserier, som beskrevet i* [2, Korollar 4.1.8.]*, at der findes et entydigt bestemt $Q_{k[\Delta]}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ med $Q_{k[\Delta]}(1) \neq 0$, så*

$$\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t) = \frac{Q_{k[\Delta]}(t)}{(1-t)^d}.$$

Lemma 1.5.1 kan således betragtes som en metode til at bestemme $Q_{k[\Delta]}(t)$.

Af ovenstående lemma ses, at polynomiet $\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t)(1-t)^d$ ikke afhænger af k men kun af den kombinatoriske struktur af Δ. Herved kan man definere

Definition 1.5.3. *For et simplicialt kompleks Δ af dimension $d-1$, er h-vektoren for Δ vektoren bestående af koefficenterne til polynomiet $\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t)(1-t)^d$ for et vilkårligt legeme k. Der benyttes notationen $h(\Delta) = (h_0(\Delta), \ldots, h_d(\Delta))$.*

Lemma 1.5.4. *For et simplicialt kompleks Δ af dimension $d-1$ gælder der, at for $0 \leq j \leq d$ vil*

$$f_{j-1}(\Delta) = \sum_{i=0}^{j} \binom{d-i}{j-i} h_i(\Delta).$$

Bevis. I henhold til Sætning 1.4.5 haves ligningen

$$\sum_{i=0}^{d} h_i(\Delta) t^i = \mathcal{H}_{k[\Delta]}(t)(1-t)^d = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(\Delta) t^i (1-t)^{d-i}. \tag{3}$$

Ved substitutionen $t \mapsto s/(1+s)$, vil $1-t$ blive erstattet med $1/(1+s)$, hvorfor substitutionen på ligningen (3) bliver

$$\sum_{i=0}^{d} h_i(\Delta) s^i (1+s)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(\Delta) s^i.$$

Lemmaet følger ved sammenligning af koefficienter i ovenstående. □

På baggrund af Lemma 1.5.1 og Lemma 1.5.4 sluttes at man på baggrund af h-vektoren for et simplicialt kompleks kan beregne f-vektoren og omvendt.

Eksempel 1.5.5 (Eksempel 1.3.5 fortsat)**.** *Af Sætning 1.4.5 følger, at Hilbertserien*
$$\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t) = 1 + \frac{4t}{(1-t)} + \frac{4t^2}{(1-t)^2} + \frac{t^3}{(1-t)^3}.$$
Herved følger, at
$$Q_{k[\Delta]}(t) = \mathcal{H}_{k[\Delta]}(t)(1-t)^3 = 1 + t - t^2$$
så h-vektoren for Δ *er* $h(\Delta) = (1, 1, -1, 0)$.

2. Lokal kohomologi

Fokus i dette kapitel er på den ene side konkret beregning af lokal kohomologi og på den anden side sammenhængen mellem lokal kohomologi og det at være et Cohen-Macaulaymodul. Der er tale om en skitseagtig gennemgang af emnet, hvor størstedelen af beviserne er henlagt til Bilag B.

2.1. **Definition og generelle egenskaber.** Lad $(R, \mathfrak{m})$ være en lokal Noethersk kommutativ ring. Der vil i det følgende blive defineret lokal kohomologi for R og en række egenskaber ved denne vil blive nævnt. Til dette defineres først Gammafunktoren.

Definition 2.1.1. *Lad* $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ *være givet ved*

- *For en R-modul M, er* $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = \{x \in M \mid \exists k \in \mathbb{N}_0\ \mathfrak{m}^k x = 0\}$
- *For R-moduler M og N, og* $\varphi \in \hom_R(M, N)$*, er*
$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(\varphi) = \varphi|_{\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)} \colon \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{m}}(N).$$

Af Lemma B.1.1 og Lemma B.1.2 følger, at $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ er en additiv funktor på kategorien af R-moduler med R-homomorfier. Herved kan man definere:

Definition 2.1.2. *De lokale kohomologi funktorer, betegnet* $\mathrm{H}^{\bullet}_{\mathfrak{m}}(-)$*, er de højre afledte funktorer af* $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$*.*

For en R-modul M er således $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{H}^i(\Gamma_{\mathfrak{m}}(I^{\bullet}))$ for alle $i \in \mathbb{Z}$, hvor $I^{\bullet}$ er en injektiv resolution af M. I henhold til velkendte egenskaber for højreafledte funktorer haves:

(1) Da $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ er venstreeksakt, er $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M) \cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$.
(2) $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ for $i < 0$.
(3) Hvis M er injektiv, er $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ for $i > 0$.
(4) Hvis $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ er en kort eksakt følge af R-moduler, vil der eksistere en lang eksakt følge:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_1) & \longrightarrow & \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_2) & \longrightarrow & \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_3) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(M_1) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \longrightarrow & \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M_1) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M_2) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M_3) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

2.2. **Beregning af lokal kohomologi.** Der vil nu blive beskrevet et kædekompleks, som benyttes til konkret beregning af lokal kohomologi.

Lad i det følgende R være en kommutativ ring og for et $n \in \mathbb{N}$ betragt $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ en følge af elementer i R. Først indføres lidt notation. For $t \in \mathbb{Z}$ sættes
$$\mathscr{D}(t, n) = \{D \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid |D| = t\}.$$
For $J = \{j_1, \ldots, j_t\} \in \mathscr{D}(t, n)$ kan elementerne i J på entydig vis nummereres, så $j_1 < \cdots < j_t$. Sæt nu $\boldsymbol{x}_J = \prod_{i=1}^t x_{j_i}$. For $1 \le s \le t$ sættes $J_s = J \setminus \{j_s\} \in \mathscr{D}(t-1, n)$.

Definition 2.2.1. *Der vil nu blive defineret et kædekompleks på formen*
$$C^{\bullet} : 0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^n \longrightarrow 0$$
hvor for $t \in \{0, \ldots, n\}$
$$C^t = \bigoplus_{J \in \mathscr{D}(t,n)} R_{\boldsymbol{x}_J}.$$

Her betegnes $R_{\boldsymbol{x}_J}$ lokaliseringen af R i $\boldsymbol{x}_J$. Da C^t er en endelig direkte sum, kan differentialet for $d^t : C^t \to C^{t+1}$ angives komponentvis. Lad $I \in \mathscr{D}(t,n)$ for et $0 \leq t \leq n-1$ og betragt $J \in \mathscr{D}(t+1,n)$. Hvis der findes $1 \leq s \leq t+1$, så $I = J_s$ sættes differentialet på komponenten $R_{\boldsymbol{x}_I} \to R_{\boldsymbol{x}_J}$ til R-homomorfien

$$\frac{r}{\boldsymbol{x}_I^\ell} \mapsto (-1)^{s-1}\frac{rx_{j_s}^\ell}{\boldsymbol{x}_J^\ell}.$$

Hvis ikke findes et $1 \leq s \leq t+1$, så $J_s = I$, sættes differentialet på denne komponent til nulhomormorfien.

Det følger ved inspektion, at dette er et kædekompleks. Som udtrykt i følgende Sætning kan man ved passende valg af $\boldsymbol{x}$ benytte dette kædekompleks til beregning af lokal kohomologi.

Sætning 2.2.2. *Lad $(R,\mathfrak{m})$ være en lokal Noethersk ring, og lad $\boldsymbol{x} = x_1,\dots,x_n$ være en følge af elementer i R, så $(\boldsymbol{x}) = \mathfrak{m}$. For en R-modul M gælder da for alle $i \in \mathbb{Z}$, at $\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M) \cong \mathrm{H}^i(M \otimes_R C^\bullet)$.*

Et bevis findes i afsnit B.2

2.3. **Lokal kohomologi og Cohen-Macaulaymoduler.** Lad $(R,\mathfrak{m})$ være en lokal Noethersk ring. Det viser sig, at lokal kohomologi kan benyttes til at bestemme, om en given endeligt frembragt R-modul er Cohen-Macaulay. For en definition af Cohen-Macaulayring henvises til Kapitel A.4. Til at vise den pågældende sammenhæng anvendes:

Sætning 2.3.1 (Grothendieck)**.** *Lad $(R,\mathfrak{m})$ være en lokal Noethersk ring og M en endeligt frembragt R-modul. Da gælder, at $\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M) = 0$ for $i < \operatorname{depth} M$ og $i > \dim M$, og derudover vil $\mathrm{H}^{\operatorname{depth} M}_\mathfrak{m}(M) \neq 0$ og $\mathrm{H}^{\dim M}_\mathfrak{m}(M) \neq 0$.*

Et bevis for Grothendiecks sætning kan findes i [2, Theorem 3.5.7.]. En umiddelbar konsekvens er:

Korollar 2.3.2. *Lad $(R,\mathfrak{m})$ være en lokal Noethersk ring. Lad M være en endeligt frembragt R-modul. Da er M en Cohen-Macaulaymodul hvis og kun hvis der for alle $i < \dim(M)$ gælder, at $\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M) = 0$.*

Bevis. Hvis M er en Cohen-Macaulaymodul, er $\operatorname{depth}(M) = \dim(M)$, så påstanden følger direkte af Grothendiecks sætning.

Som bemærket i afsnit A.4, vil $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(M)$. Af Grothendiecks sætning følger, at $\mathrm{H}^{\operatorname{depth}(M)}_\mathfrak{m}(M) \neq 0$. Af antagelsen konkluderes således, at $\operatorname{depth}(M) = \dim(M)$. □

3. Lokal kohomologi og Stanley-Reisnerringe

I dette kapitel vil Δ være et simplicialt kompleks på $V = \{v_1,\dots,v_n\}$, hvor $n \in \mathbb{N}$. Tilsvarende vil k være et legeme. Der benyttes betegnelsen R for Stanley-Reisnerringen $k[\Delta]$. Lad x_i være restklassen af X_i i R, og sæt $\mathfrak{m} = (x_1,\dots,x_n)$. Bemærk, at da vil $\mathfrak{m}$ være et maksimalideal i R. Således vil $(R_\mathfrak{m}, \mathfrak{m}R_\mathfrak{m})$ være en lokal Noethersk ring, hvorfor lokal kohomologi er defineret. Maksimalidealet $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ er frembragt af $\frac{x_1}{1},\dots,\frac{x_n}{1}$. Definer nu kædekomplekset $C^\bullet_{R_\mathfrak{m}}$ som i Definition 2.2.1, idet ringen i dette tilfælde er $R_\mathfrak{m}$ og $\boldsymbol{x}^{R_\mathfrak{m}} = \frac{x_1}{1},\dots,\frac{x_n}{1}$. I henhold til Sætning 2.2.2, kan lokal kohomologi beregnes ved hjælp af kædekomplekset $C^\bullet_{R_\mathfrak{m}}$. Lad $C^\bullet_R$ være kædekomplekset fra Definition 2.2.1, hvor R er Stanley-Reisnerringen og $\boldsymbol{x}^R = x_1,\dots,x_n$.

Den første hovedsætning i dette kapitel er, at man ved beregning af lokal kohomologi af $R_\mathfrak{m}$ kan benytte kædekomplekset $C^\bullet_R$ i stedet for $C^\bullet_{R_\mathfrak{m}}$, idet:

Sætning 3.0.3. *Om den lokale kohomologi af R_m gælder, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ vil* $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}) \cong \mathrm{H}^i(C^\bullet_R)$ *som R-moduler.*

Det viser sig, at de lokale kohomologimoduler således kun afhænger af delkomplekser af Δ, der opfylder følgende definition.

Definition 3.0.4. *For $F \in \Delta$ defineres*

$$\operatorname{st}_\Delta F = \{G \subseteq V \mid G \cup F \in \Delta\}, \quad \operatorname{lk}_\Delta F = \{G \subseteq V \mid G \cup F \in \Delta, G \cap F = \emptyset\}.$$

Disse mængder kaldes stjernen *henholdvis* lænken *af F. Der bemærkes, at disse er delkomplekser af Δ.*

Den omtalte sammenhæng er beskrevet i

Sætning 3.0.5 (Hochster)**.** *Hilbertserien for de lokale kohomologimoduler af $R_\mathfrak{m}$ med hensyn til $\mathbb{Z}^n$-gradueringen er:*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})}(\boldsymbol{t}) = \sum_{F \in \Delta} \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|F|-1}(\operatorname{lk}_\Delta F; k) \prod_{v_j \in F} \frac{t_j^{-1}}{1 - t_j^{-1}}.$$

3.1. **$\mathbb{Z}^n$-graduering af kædekomplekset $C^\bullet_R$.** Hensigten er nu at definere en $\mathbb{Z}^n$-graduering på $C^\bullet_R$, som inducerer en $\mathbb{Z}^n$-graduering af homologimodulerne.

Definition 3.1.1. *Lad $I \in \mathscr{D}(r,n)$ hvor $1 \leq r \leq n$. For $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ sættes*

$$(R_{\boldsymbol{x}_I^R})_\alpha = \left\{ \frac{r}{(\boldsymbol{x}_I^R)^m} \;\middle|\; r \textit{ homogent}, \ \deg r - m \deg \boldsymbol{x}_I^R = \alpha \right\},$$

hvor homogent og grad henviser til $\mathbb{Z}^n$-gradueringen af R.

Det vil først blive vist, at ovenstående for $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ er et vektorrum over k og dimensionen vil blive bestemt. For $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ benyttes notationen:

$$G_\alpha = \{v_i \mid a_i < 0\}, \quad H_\alpha = \{v_i \mid a_i > 0\}.$$

Lemma 3.1.2. *Lad $I \in \mathscr{D}(r,n)$ for et $1 \leq r \leq n$. Lad $F = \{v_i \mid i \in I\}$.*

Da gælder, at for alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ haves, at $(R_{\boldsymbol{x}_I^R})_\alpha$ er et vektorrum over k og $\dim_k (R_{\boldsymbol{x}_I^R})_\alpha \leq 1$. Desuden er $(R_{\boldsymbol{x}_I^R})_\alpha \cong k$ hvis og kun hvis $G_\alpha \subseteq F$ og $F \cup H_\alpha \in \Delta$.

Bevis. For at lette notationen kaldes $\boldsymbol{x}_I^R$ for $\boldsymbol{x}$. Lad $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Hvis $(R_{\boldsymbol{x}})_\alpha = 0$ er dette oplagt et vektorrum af dimension 0.

Antag nu, at $(R_{\boldsymbol{x}})_\alpha \neq 0$. Da findes $r \in R$ homogent og $m \in \mathbb{N}_0$ så $\frac{r}{\boldsymbol{x}^m} \in (R_{\boldsymbol{x}})_\alpha$ og $\frac{r}{\boldsymbol{x}^m} \neq \frac{0}{1}$. Betragt $\frac{r'}{\boldsymbol{x}^{m'}} \in (R_x)_\alpha$. Af antagelserne følger let, at $r\boldsymbol{x}^{m'}$ og $r'\boldsymbol{x}^m$ er homogene af samme grad i R. Da $\frac{r}{\boldsymbol{x}^m} \neq \frac{0}{1}$ sluttes, at $r\boldsymbol{x}^{m'} \neq 0$. For et $\beta \in \mathbb{Z}^n$, er $\dim_k(R_\beta) \leq 1$, så ethvert homogent element forskellig fra nul, vil være en basis for den givne homogene komponent af R. Ergo der findes $\lambda \in k$, så $\lambda(r\boldsymbol{x}^{m'}) = r'\boldsymbol{x}^m$. Da følger, at $\lambda\left(\frac{r}{\boldsymbol{x}^m}\right) = \frac{r'}{\boldsymbol{x}^{m'}}$. Idet der for alle $\lambda \in k$ gælder, at λr er homogent af samme grad som r, følger nu, at

$$(R_{\boldsymbol{x}})_\alpha = \left\{ \lambda\left(\frac{r}{\boldsymbol{x}^m}\right) \;\middle|\; \lambda \in k \right\},$$

hvilket er et k-vektorrum af dimension 1.

De homogene elementer i R er et monomium multipliceret med et element fra k. Brøken $\frac{r}{\boldsymbol{x}^m}$ ligger således i $(R_{\boldsymbol{x}})_\alpha$ netop hvis $r = \lambda x^\gamma$, hvor $\lambda \in k, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ og $m \in \mathbb{N}_0$ med $\gamma - m \deg \boldsymbol{x} = \alpha$. Der haves, at $\frac{\lambda x^\gamma}{\boldsymbol{x}^m} \neq \frac{0}{1}$ i $R_{\boldsymbol{x}}$ hvis og kun hvis $\boldsymbol{x}^\ell(\lambda x^\gamma) \neq 0$ for alle $\ell \in \mathbb{N}_0$. I henhold til Lemma 1.4.2 er dette ækvivalent med, at $F \cup \operatorname{Supp}\gamma \in \Delta$. Herved følger, at for $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ er $(R_{\boldsymbol{x}})_\alpha \neq 0$ hvis og kun hvis der findes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ og $m \in \mathbb{N}_0$, for hvilken:

- $\gamma - m \deg \boldsymbol{x} = \alpha$
- $F \cup \operatorname{Supp}\gamma \in \Delta$

Antag $(R_x)_\alpha \cong k$. Da findes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ og $m \in \mathbb{N}_0$, så betingelserne er opfyldt. Benyt for $1 \leq i \leq n$ betegnelserne c_i, a_i og $\boldsymbol{x}_i$ for det i'te komponent af henholdvis γ, α og $\deg \boldsymbol{x}$. Da vil for $1 \leq i \leq n$ haves ligningen $c_i = a_i + m\boldsymbol{x}_i$. Bemærk, at for alle $1 \leq i \leq n$ er $\boldsymbol{x}_i \in \{0,1\}$ og $\boldsymbol{x}_i = 1$ netop hvis $v_i \in F$. Desuden haves, da $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$, at $c_i \geq 0$ for alle $1 \leq i \leq n$ og $c_i > 0$ er ækvivalent med, at $v_i \in \operatorname{Supp}\gamma$. Af ligningen følger nu, at for alle $i \in \{1,\dots,n\}$ med $a_i < 0$, vil $\boldsymbol{x}_i > 0$. Herved fåes, at $G_\alpha \subseteq F$. Tilsvarende sluttes, at for alle $i \in \{1,\dots,n\}$ med $a_i > 0$, vil $c_i > 0$. Så der konkluderes, at $H_\alpha \subseteq \operatorname{Supp}\gamma$. Da vil

$$H_\alpha \cup F \subseteq \operatorname{Supp}\gamma \cup F \in \Delta,$$

hvorved det følger, at $H_\alpha \cup F \in \Delta$.

Antag nu, at $G_\alpha \subseteq F$ og $F \cup H_\alpha \in \Delta$. Definer $a = \max\{|a_i| \mid a_i < 0\}$, hvis $G_\alpha \neq \emptyset$ og $a = 0$ hvis $G_\alpha = \emptyset$. Herved er $a \in \mathbb{N}_0$. Sæt $\gamma = \alpha + a \deg \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$. Af antagelserne følger, at for $i \in \{1,\dots,n\}$, vil

$$a_i < 0 \Longrightarrow v_i \in G_\alpha \Longrightarrow v_i \in F \Longrightarrow i \in I,$$

På baggrund af dette konkluderes, at $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$. Der haves, at $\operatorname{Supp}\gamma \subseteq F \cup H_\alpha$, så det følger af antagelserne, at $\operatorname{Supp}\gamma \cup F \in \Delta$. □

Ved at benytte den givne $\mathbb{Z}^n$-graduering på R følger nu ved simple betragtninger, at vektorrummene fra Definition 3.1.1 vil udgøre en $\mathbb{Z}^n$-graduering af $R_{\boldsymbol{x}_I^R}$ som R-modul. For et $0 \leq r \leq n$, sættes for $\alpha \in \mathbb{Z}^n$:

$$(C^r)_\alpha = \bigoplus_{I \in \mathscr{D}(r,n)} (R_{\boldsymbol{x}_I^R})_\alpha.$$

Dette vil være en $\mathbb{Z}^n$-graduering af C^r betragtet som R-modul. Der haves, at differentialet af $C^\bullet$ afbilder $(C^r)_\alpha$ på $(C^{r+1})_\alpha$. Kædekomplekset $C^\bullet$ er således et kompleks af $\mathbb{Z}^n$-graduerede R-moduler, hvorved kohomologimodulerne på naturlig vis nedarver en struktur som $\mathbb{Z}^n$-graduerede R-moduler.

Betragt et $0 \leq r \leq n$. Da C^r er den direkte sum over en endelig mængde, følger det af Lemma 3.1.2, at for alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ vil $(C^r)_\alpha$ være et vektorrum af endelig dimension. Lad for $I \in \mathscr{D}(r,n)$ mængden $F_I = \{v_i \mid i \in I\}$. Af Lemma 3.1.2 konkluderes, at $(C^r)_\alpha$ har en basis på formen

$$\{b_I \mid I \in \mathscr{D}(r,n), G_\alpha \subseteq F_I, F_I \cup H_\alpha \in \Delta\},$$

hvor b_I er et element forskellig fra nul i $R_{\boldsymbol{x}_I^R}$. For et $I \in \mathscr{D}(r,n)$ giver antagelsen $F_I \cup H_\alpha \in \Delta$, at $F_I \in \Delta$. Ved at identificere I med F_I følger, at $(C^r)_\alpha$ har en basis på formen

$$\{b_F \mid F \in \Delta, |F| = r, G_\alpha \subseteq F, F \cup H_\alpha \in \Delta\}.$$

Da R er en k-algebra, vil R-homomorfier ligeledes være k-lineære afbildninger. Restriktionen af differentialet af $C^\bullet$ som afbildning fra $(C^r)_\alpha$ til $(C^{r+1})_\alpha$ vil være en k-lineær afbildning mellem vektorrum af endelig dimension. Således kan komplekset $(C^\bullet)_\alpha$ ligeledes betragtes som et kædekompleks af k-vektorrum.

For en given orientering af V, kan der vælges en basis på ovenstående form, så differentialet $d^r\colon (C^r)_\alpha \to (C^{r+1})_\alpha$ vil være den k-lineære afbildning givet ved, at for b_F i basen for $(C^r)_\alpha$ er

$$d^r(b_F) = \sum_{\substack{F' \in \Delta, |F'| = r+1 \\ F' \cup H_\alpha \in \Delta \\ \exists s \in \{0,\dots,r\} F'_s = F}} (-1)^s b_{F'_s}.$$

Bemærk, at hvis der findes $0 \leq s \leq r$, så $F = F'_s$, da vil $F \subseteq F'$ og således $G_\alpha \subseteq F'$. Herved vil $b_{F'}$ i ovenstående sum være et element i den givne basis for $(C^{r+1})_\alpha$.

Med den inducerede $\mathbb{Z}^n$-graduering af kohomologimodulerne af $C^\bullet$, vil der for $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ således gælde, at som vektorrum over k, er $\mathrm{H}^i(C^\bullet)_\alpha \cong \mathrm{H}^i((C^\bullet)_\alpha)$.

3.2. **Lokal kohomologi for Stanley-Reisnerringe.** Der gennemgås nu en række lemmaer om kohomologimodulerne af komplekserne $C^\bullet_R$ og $C^\bullet_{R_\mathfrak{m}}$, som udmunder i et bevis for Sætning 3.0.3.

Lemma 3.2.1. *Betragtes $(C^\bullet_R)_\mathfrak{m}$ som et kædekompleks af $R_\mathfrak{m}$-moduler, vil $C^\bullet_{R_\mathfrak{m}} \cong (C^\bullet_R)_\mathfrak{m}$.*

Bevis. Lad $t \geq 0$ og $I \in \mathscr{D}(t,n)$. Definer afbilningen:

$$f_I\colon (R_{\boldsymbol{x}_I^R})_\mathfrak{m} \to (R_\mathfrak{m})_{\boldsymbol{x}_I^{R_\mathfrak{m}}}, \quad \text{ved } f_I\left(\frac{r/(\boldsymbol{x}_I^R)^\ell}{m}\right) = \frac{r/m}{(\boldsymbol{x}_I^{R_\mathfrak{m}})^\ell}$$

Det følger ved inspektion, at dette er en veldefineret $R_\mathfrak{m}$-isomorfi. Funktionen f_I kan således på naturlig vis udvides til en afbildning $f^t : (C^t_R)_\mathfrak{m} \to C^t_{R_\mathfrak{m}}$ ved at den for $I, J \in \mathscr{D}(t,n)$ på komponenten $(R_{\boldsymbol{x}_I^R})_\mathfrak{m} \to (R_\mathfrak{m})_{\boldsymbol{x}_J^{R_\mathfrak{m}}}$ er f_I, hvis $I = J$, og nulhomomorfien ellers. Da vil f^t være en $R_\mathfrak{m}$-isomorfi for alle $t \geq 0$. Ved simple beregninger ses, at dette er en homomorfi af kædekomplekser af $R_\mathfrak{m}$-moduler. □

Sætning 3.2.2. *Om de lokale kohomologimoduler af R_m-modulen $R_\mathfrak{m}$ gælder at for alle $i \in \mathbb{Z}$ vil $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}) \cong \mathrm{H}^i(C^\bullet_R)_\mathfrak{m}$.*

Bevis. Lad $i \in \mathbb{Z}$. Af Sætning 2.2.2 følger, at $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}) \cong \mathrm{H}^i(R_\mathfrak{m} \otimes_{R_\mathfrak{m}} C^\bullet_{R_\mathfrak{m}})$. På kategorien af $R_\mathfrak{m}$-moduler er funktoren $R_\mathfrak{m} \otimes_{R_\mathfrak{m}} (-)$ er isomorf med identitetsfunktoren. Herved følger nu, at $R_\mathfrak{m} \otimes_{R_\mathfrak{m}} C^\bullet_{R_\mathfrak{m}} \cong C^\bullet_{R_\mathfrak{m}}$ som kædekomplekser af $R_\mathfrak{m}$-moduler. På baggrund af Lemma 3.2.1 haves, at $C^\bullet_{R_\mathfrak{m}} \cong (C^\bullet_R)_\mathfrak{m}$ hvorfor

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}) \cong \mathrm{H}^i(C^\bullet_{R_\mathfrak{m}}) \cong \mathrm{H}^i((C^\bullet_R)_\mathfrak{m}) \cong \mathrm{H}^i(C^\bullet_R)_\mathfrak{m},$$

hvor den sidste isomorfi følger af, at lokalisering er en eksakt additiv funktor og kommuterer således med kohomologi. □

Lad nu $C^\bullet$ være kædekomplekset $C^\bullet_R$.

Lemma 3.2.3. *Lad $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ opfylde, at $x_\ell \neq 0$. For alle $i \in \mathbb{Z}$ haves da, at $\mathrm{H}^i(C^\bullet)_{x_\ell} = 0$.*

Bevis. Definer nu for $k \in \{0, \ldots, n\}$ funktionen $\sigma^k\colon (C^k)_{x_\ell} \to (C^{k-1})_{x_\ell}$ ved at for $I \in \mathscr{D}(k,n)$ og $J \in \mathscr{D}(k-1,n)$ er den på komponenten $(R_{\boldsymbol{x}_I})_{x_\ell} \to (R_{\boldsymbol{x}_J})_{x_\ell}$ funktionen $(-1)^{s-1}\,\mathrm{id}$, hvis $I = J \cup \{\ell\}$ og $\ell = i_s$, og nulhomomorfien ellers. Bemærk, at hvis $\ell \in I$, vil $(R_{\boldsymbol{x}_I})_{x_\ell} \cong R_{\boldsymbol{x}_I}$ og ligeledes vil $(R_{\boldsymbol{x}_{I\setminus\{\ell\}}})_{x_\ell} \cong R_{\boldsymbol{x}_I}$, hvorfor definitionen af σ^k giver mening. Det følger ved inspektion, at identiteten og nulafbildningen på $(C^\bullet)_{x_\ell}$ er homotopiske via $\sigma^\bullet$. Herved følger, at $(C^\bullet)_{x_\ell}$ er spilt-eksakt, hvorfor der for alle $i \in \mathbb{Z}$ gælder, at $\mathrm{H}^i((C^\bullet)_{x_\ell}) = 0$. Da lokalisering er en eksakt additiv funktor, kommuterer den med kohomologi, hvorfor der for $i \in \mathbb{Z}$ haves, at

$$\mathrm{H}^i(C^\bullet)_{x_\ell} \cong \mathrm{H}^i((C^\bullet)_{x_\ell}) = 0.$$ □

Lemma 3.2.4. *For alle $i \in \mathbb{Z}$ haves, at hvis $\mathrm{H}^i(C^\bullet) \neq 0$, vil $\operatorname{Supp}\mathrm{H}^i(C^\bullet) = \{\mathfrak{m}\}$.*

Bevis. Antag med henblik på modstrid, at der findes et $i \in \mathbb{Z}$, så $\mathrm{H}^i(C^\bullet) \neq 0$ og $\operatorname{Supp}\mathrm{H}^i(C^\bullet) \neq \{\mathfrak{m}\}$. For en R-modul M, vil $\operatorname{Supp} M = \emptyset$ hvis og kun hvis $M = 0$, så der sluttes, at $\operatorname{Supp}\mathrm{H}^i(C^\bullet) \neq \emptyset$. Herved findes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ i støtten for $\mathrm{H}^i(C^\bullet)$ som opfylder, at $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. Da $\mathrm{H}^i(C^\bullet)$ er $\mathbb{Z}^n$-gradueret, vil $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Supp}\mathrm{H}^i(C^\bullet)$ i henhold til [2, Lemma 1.5.6.]. Da $(R, \mathfrak{m})$ er en *lokal ring i henhold til Lemma 1.4.6, vil $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{m}$. Hvis $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{m}$, ville $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}$, hvorfor $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{m}$ er et maksimalideal. Herved konkluderes, at $\mathfrak{p}^* \subsetneq \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$, vil der findes et $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, så $x_\ell \notin \mathfrak{p}^*$. Bemærk, at der må haves, at $x_\ell \neq 0$.

Per antagelse er $\mathrm{H}^i(C^\bullet)_{\mathfrak{p}^*} \neq 0$, hvorfor der findes $v \in \mathrm{H}^i(C^\bullet)$ forskellig fra nul, for hvilken $\operatorname{Ann}_R(v) \subseteq \mathfrak{p}^*$. Da $\mathrm{H}^i(C^\bullet)_{x_\ell} = 0$, sluttes, at der findes et $s \in \mathbb{N}_0$, så $x_\ell^s \in \operatorname{Ann}_R(v)$. Hvis $s = 0$, ville $1 \in \mathfrak{p}^*$ i modstrid med, at $\mathfrak{p}^*$ er et primideal. Ergo

$x_\ell^s \in \mathfrak{p}^*$ for et $s \in \mathbb{N}$. Da $\mathfrak{p}^*$ er et primideal sluttes, at $x_\ell \in \mathfrak{p}^*$, hvorfor en modstrid fremkommer. $\square$

Lemma 3.2.5. *Lad $\widetilde{R}$ være en kommutativ Noethersk ring og $\mathfrak{m}$ et maksimalideal i $\widetilde{R}$. Lad M være en $\widetilde{R}$-modul, som opfylder, at $\operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{m}\}$. Da vil der for alle $m \in M$ med $m \neq 0$ gælde, at $\operatorname{rad}(\operatorname{Ann}_{\widetilde{R}}(m)) = \mathfrak{m}$.*

Bevis. For en R-modul M, vil $\operatorname{Supp} M = \emptyset$ hvis og kun hvis $M = 0$, så der sluttes, at $M \neq 0$. Lad $m \in M$ opfylde, at $m \neq 0$. Lad $\mathfrak{p}$ være et minimalt primideal, der opfylder, at $\operatorname{Ann}_{\widetilde{R}}(m) \subseteq \mathfrak{p}$. Da vil $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{m}\}$, så $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Idet $\mathfrak{m}$ er et maksimalideal sluttes, at $\mathfrak{m}$ er det eneste primideal, der indeholder $\operatorname{Ann}_{\widetilde{R}}(m)$. Da $\widetilde{R}$ er en Noethersk ring konkluderes, at

$$\operatorname{rad}(\operatorname{Ann}_{\widetilde{R}}(m)) = \{r \in \widetilde{R} \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ så } r^N \in \operatorname{Ann}_R(m)\} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \\ \operatorname{Ann}_R(m) \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} = \mathfrak{m}. \quad \square$$

Sætning 3.2.6. *For alle $i \in \mathbb{Z}$, vil $\operatorname{H}^i(C^\bullet)_\mathfrak{m} \cong \operatorname{H}^i(C^\bullet)$ som R-moduler.*

Bevis. Lad $i \in \mathbb{Z}$. Hvis $\operatorname{H}^i(C^\bullet) = 0$, vil sætningen være opfyldt, idet $0_\mathfrak{m} \cong 0$. Antag derfor, at $\operatorname{H}^i(C^\bullet) \neq 0$. Af Lemma 3.2.4 følger, at $\operatorname{Supp} \operatorname{H}^i(C^\bullet) = \{\mathfrak{m}\}$. Da $\operatorname{H}^i(C^\bullet) \neq 0$, vil ligeledes $\operatorname{Ass} \operatorname{H}^i(C^\bullet) \neq \emptyset$ og $\operatorname{Ass} \operatorname{H}^i(C^\bullet) \subseteq \operatorname{Supp} \operatorname{H}^i(C^\bullet)$, så der sluttes, at $\operatorname{Ass} \operatorname{H}^i(C^\bullet) = \{\mathfrak{m}\}$.

Bemærk, at $R \setminus \mathfrak{m} = \{\lambda + m \mid r \in k \setminus \{0\}, m \in \mathfrak{m}\}$. Lad $\lambda + m \in R \setminus \mathfrak{m}$, og betragt afbildningen $s_{\lambda+m} \colon \operatorname{H}^i(C^\bullet) \to \operatorname{H}^i(C^\bullet)$ givet ved $s_{\lambda+m}(v) = (\lambda + m)v$. Dette er en R-homomorfi. Der vil nu blive vist, at den er bijektiv.

Antag, at der for $v \in \operatorname{H}^i(C^\bullet)$ gælder, at $(\lambda + m)v = 0$. Da er $\lambda + m \in \operatorname{Ann}_R(v)$. Hvis $v \neq 0$ er $\operatorname{Ann}_R(v)$ indeholdt i et associeret primideal til $\operatorname{H}^i(C^\bullet)$, hvorfor $\operatorname{Ann}_R(v) \subseteq \mathfrak{m}$. Herved konkluderes, at $\lambda + m \in \mathfrak{m}$ og derved også $\lambda \in \mathfrak{m}$. Da λ er invertibel i R er dette i modstid med, at $\mathfrak{m}$ er et maksimalideal. Således sluttes, at $v = 0$, og $s_{\lambda+m}$ er injektiv.

Lad $v \in \operatorname{H}^i(C^\bullet)$ være forskellig fra nul. Da R er Noethersk findes for $m \in \mathfrak{m}$ i henhold til Lemma 3.2.5 et $N \in \mathbb{N}$, så $m^N \in \operatorname{Ann}_R(v)$. Herved vil

$$(\lambda + m)(\lambda^{-1}v - (\lambda^{-1})^2 mv + \cdots + (-1)^{N-1}(\lambda^{-1})^N m^{N-1} v) = v,$$

så $v \in \operatorname{im} s_{\lambda+m}$. Da $(\lambda + m)0 = 0$, følger nu, at $s_{\lambda+m}$ er surjektiv.

Betragt nu afbildningen:

$$\phi : \operatorname{H}^i(C^\bullet) \to \operatorname{H}^i(C^\bullet)_\mathfrak{m}, \quad \phi(v) = \frac{v}{1}.$$

Denne er oplagt en R-homomorfi, og idet s_r er bijektiv for alle $r \in R \setminus \mathfrak{m}$ følger, at ϕ er bijektiv i henhold til [11, (3.4)]. $\square$

Bevis for Sætning 3.0.3. Der haves, at $R_\mathfrak{m}$-moduler kan betragtes som R-moduler og under disse betragtninger vil en $R_\mathfrak{m}$-isomorfi være en R-isomorfi. Resultatet følger da direkte af Sætning 3.2.2 og Sætning 3.2.6. $\square$

Bemærk, at da for alle $i \in \mathbb{Z}$ gælder, at $\operatorname{H}^i(C^\bullet)$ er $\mathbb{Z}^n$-gradueret som R-modul, vil ovenstående korollar give anledning til en $\mathbb{Z}^n$-graduering af de lokale kohomologimoduler af $R_\mathfrak{m}$ betragt som R-moduler.

3.3. Hochsters sætning.

Hochsters Sætning udtrykker den ønskede sammenhæng mellem lokal kohomologi af $R_\mathfrak{m}$ og reduceret simplicial homologi af delkomplekser af Δ. Centralt for beviset er følgende lemma:

Lemma 3.3.1. *Lad $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ og $j = |G_\alpha|$. Da vil som komplekser af k-vektorrum*

$$(C^\bullet)_\alpha \cong \hom_\mathbb{Z}(\widetilde{\mathscr{C}}(\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha)[-j-1], k).$$

Bemærk, at man sætter $\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha = \emptyset$*, hvis* $G_\alpha \notin \operatorname{st}_\Delta H_\alpha$*, og lad* $\tilde{\mathscr{C}}(\emptyset)$ *være nulkomplekset.*

Bevis. For $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ og $i \in \mathbb{Z}$ sætttes

$$\mathcal{B}_i = \{F \in \Delta \mid G_\alpha \subseteq F, F \cup H_\alpha \in \Delta, |F| = i\}.$$

$$\mathcal{B}'_i = \{F' \in \Delta \mid F' \in \operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha, |F'| = i - j\}.$$

Benyttes Definition 3.0.4 ses, at

$$\mathcal{B}'_i = \{F' \in \Delta \mid G_\alpha \cap F' = \emptyset, F' \cup G_\alpha \cup H_\alpha \in \Delta, |F'| = i - j\}.$$

Lad $F \in \mathcal{B}_i$. Da vil $G_\alpha \subseteq F$, så $|F \setminus G_\alpha| = |F| - |G_\alpha| = i - j$. Der gælder, at

$$(F \setminus G_\alpha) \cap G_\alpha = \emptyset, \quad (F \setminus G_\alpha) \cup G_\alpha \cup H_\alpha = F \cup H_\alpha \in \Delta.$$

Herved sluttes, at $F \setminus G_\alpha \in \mathcal{B}'_i$. Tilsvarende vil der for $F' \in \mathcal{B}'_i$ gælde, at $(F' \cup G_\alpha) \cup H_\alpha \in \Delta$ og $G_\alpha \subseteq F' \cup G_\alpha$. Da $F' \cap G_\alpha = \emptyset$ vil

$$|F' \cup G_\alpha| = |F'| + |G_\alpha| = i - j + j = i,$$

hvorfor det følger, at $F' \cup G_\alpha \in \mathcal{B}_i$. Afbildningen $\psi\colon \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}'_i$ givet ved $\psi(F) = F \setminus G_\alpha$ er herved bijektiv med invers $\psi^{-1}\colon \mathcal{B}'_i \to \mathcal{B}_i$, hvor $\psi^{-1}(F') = F' \cup G_\alpha$.

Antag, at $G_\alpha \notin \operatorname{st}_\Delta H_\alpha$. Da vil $\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha = \emptyset$, så det følger af ovenstående bijektion, at $\mathcal{B}_i = \emptyset$ for alle $i \in \mathbb{Z}$. Da $\{b_F \mid F \in \mathcal{B}_i\}$ er en basis for $(C^i)_\alpha$, sluttes, at $(C^\bullet)_\alpha$ er nulkomplekset. Tilsvarende vil $\hom_\mathbb{Z}(\tilde{\mathscr{C}}(\emptyset)[-j-1], k)$ være nulkomplekset, så i dette tilfælde er det oplagt, at disse komplekser er isomorfe. Lad derfor i det følgende $G_\alpha \in \operatorname{st}_\Delta H_\alpha$, hvorved $\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha$ er et simplicialt kompleks.

Bemærk, at for $i \in \mathbb{Z}$, er

$$\tilde{\mathscr{C}}(\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha)_{i-j-1} = \bigoplus_{F' \in \mathcal{B}'_i} \mathbb{Z}F'.$$

Herved kan man for $F' \in \mathcal{B}'_i$ definere $\varphi_{F'} \in \hom_\mathbb{Z}(\tilde{\mathscr{C}}(\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha)_{i-j-1}, k)$ ved, at for $F'' \in \mathcal{B}'_i$, vil

$$\varphi_{F'}(F'') = \begin{cases} 1 & F'' = F' \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Betragtet som om vektorrum over k vil $\{\varphi_{F'} \mid F' \in \mathcal{B}'_i\}$ udgøre en basis for $\hom_\mathbb{Z}(\tilde{\mathscr{C}}(\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha)_{i-j-1}, k)$.

Definer nu for $i \in \mathbb{Z}$ afbildningen:

$$\gamma^i : (C^i)_\alpha \to \hom_\mathbb{Z}(\tilde{\mathscr{C}}(\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha)_{i-j-1}, k),$$

ved $\gamma^i(b_F) = \varphi_{\psi(F)}$. Denne afbildningen er k-lineær og afbilleder basen $\{b_F \mid F \in \mathcal{B}_i\}$ for $(C^i)_\alpha$ bijektivt på basen $\{\varphi_{F'} \mid F' \in \mathcal{B}'_i\}$ for $\hom_\mathbb{Z}(\tilde{\mathscr{C}}(\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha)_{i-j-1}, k)$. Herved konkluderes, at γ^i er en isomorfi af k-vektorrum.

Af [2, Lemma 5.3.1.] følger, at den reducede homologi af Δ ikke afhænger af den givne lineære ordning af V. Derfor kan der antages, at V er ordnet således, at elementerne i G_α kommer sidst i denne ordning. Da $\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha$ er et simplicialt kompleks på V, kan det gives den inducerede orientering.

Der vil nu blive vist, at med disse orienteringer, vil $\gamma^\bullet$ være en homomorfi af kædekomplekser. Der skal således vises, at for $i \in \mathbb{Z}$ og $\kappa \in (C^i)_\alpha$ er $\gamma^{i+1}(d\kappa) = \delta(\gamma^i(\kappa))$ som $\mathbb{Z}$-homomorfier fra $\tilde{\mathscr{C}}(\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha)_{i-j-1}$ til k. Da $\{b_F \mid F \in \mathcal{B}_i\}$ og $\{F'' \mid F'' \in \mathcal{B}'_{i+1}\}$ udgør en k-basis for $(C^i)_\alpha$ henholdvis $\mathbb{Z}$-basis for $\tilde{\mathscr{C}}(\operatorname{lk}_{\operatorname{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha)_{i-j}$, er det tilstrækkeligt at vise, at for $F \in \mathcal{B}_i$ og $F'' \in \mathcal{B}'_{i+1}$ er

$$\gamma^{i+1}(d(b_F))(F'') = \delta(\gamma^i(b_F))(F'')$$

Lad $F \in \mathcal{B}_i$, hvorved $b_F \in (C^i)_\alpha$. I henhold til tidligere, kan der antages at

$$d(b_F) = \sum_{\substack{F' \in \mathcal{B}_{i+1} \\ \exists s \in \{0,\dots,i\} F'_s = F}} (-1)^s b_{F'}.$$

Lad F' være et element i ovenstående sum. Da vil $F' = [v'_0, \dots, v'_i]$. Idet $F' \in \mathcal{B}_{i+1}$, vil $G_\alpha \subseteq F'$. I overenstemmelse med den givne ordning på V, er således $G_\alpha = \{v'_{i+1-j}, \dots, v'_i\}$. Antag $s \in \{i+1-j, \dots, i\}$. Da er $v_s \in G_\alpha$, men $v_s \notin F = F'_s$. Dette er i modstrid med, at $G_\alpha \subseteq F$. Herved sluttes, at $s \in \{0, \dots, i-j\}$. Der gælder

$$\gamma^{i+1}(d(b_F)) = \sum_{\substack{F' \in \mathcal{B}_{i+1} \\ \exists s \in \{0,\dots,i-j\} F' s = F}} (-1)^s \varphi_{\psi(F')}.$$

For $F'' \in \mathcal{B}'_{i+1}$ gælder således, at $\gamma^{i+1}(d(b_F))(F'')$ er $(-1)^s$ hvis der findes $F' \in \mathcal{B}_{i+1}$ og $s \in \{0, \dots, i-j\}$ så $F'_s = F$ og $\psi(F') = F''$. Hvis dette ikke er tilfældet, er $\gamma^{i+1}(d(b_F))(F'') = 0$. Da $\delta F'' = \sum_{r=0}^{i-j} (-1)^k F''_r$, vil således

$$\begin{aligned}
\delta(\gamma^i(b_F))(F'') &= \gamma^i(b_F)(\delta F'') = \varphi_{\psi(F)}(\delta(F'')) \\
&= \begin{cases} (-1)^r & \exists r \in \{0, \dots, i-j\} \text{ så } \psi(F) = F''_r \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}
\end{aligned}$$

For at vise, at $\gamma^{i+1}(d(b_F))(F'') = \delta(\gamma^i(b_F))(F'')$, er det nok at vise, at

$$\exists F' \in \mathcal{B}_{i+1}, s \in \{0, \dots, i-j\} \text{ så } F = F'_s, \psi(F') = F'' \tag{4}$$

hvis og kun hvis

$$\exists r \in \{0, \dots, i-j\} \text{ så } \psi(F) = F''_r, \tag{5}$$

og at i dette tilfælde vil $r = s$.

Antag (4) gælder, og skriv $F' = [v'_0, \dots, v'_i]$. Da elementerne i G_α kommer til sidst i den lineære ordning på V, vil som tidligere

$$F'' = F' \setminus G_\alpha = [v'_0, \dots, v'_{i-j}],$$

så $F''_s = F'_s \setminus G_\alpha = \psi(F'_s) = \psi(F)$.

Antag (5). Lad $F' = F'' \cup G_\alpha \in \mathcal{B}_{i+1}$. Med de givne orienteringer følger, at hvis $F' = [v'_0, \dots, v'_i]$, vil $G_\alpha = \{v'_{i+1-j}, \dots, v'_i\}$. Da $0 \le r \le i-j$, vil således $G_\alpha \subseteq F'_r$. Idet $F'_r \cup H_\alpha \subseteq F' \cup H_\alpha \in \Delta$, vil $F'_r \cup H_\alpha \in \Delta$. Der haves, at $|F'_r| = i$, så der sluttes nu, at $F'_r \in \mathcal{B}_i$. Per antagelse er

$$\psi(F'_r) = F'_r \setminus G_\alpha = F''_r = \psi(F).$$

Idet ψ er bijektiv på $\mathcal{B}_i$ følger nu, at $F = F'_r$ og således vil F' opfylde det søgte. □

Bevis for Hochsters Sætning 3.0.5. I henhold til Sætning 3.0.3 vil der for $i \in \mathbb{Z}$ gælde, at $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}) \cong \mathrm{H}^i(C^\bullet)$ som R-moduler. Som tidligere bemærket giver denne isomorfi anledning til en $\mathbb{Z}^n$-graduering af $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})$ som R-modul. For $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ haves, at der som vektorrum over k vil gælde, at

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})_\alpha \cong \mathrm{H}^i(C^\bullet)_\alpha \cong \mathrm{H}^i((C^\bullet)_\alpha).$$

Af Lemma 3.3.1 sluttes, at som vektorrum over k, er

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^i((C^\bullet)_\alpha) &\cong \mathrm{H}^i(\hom_\mathbb{Z}(\widetilde{\mathscr{C}}(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha)[-|G_\alpha|-1], k)) \\
&\cong \mathrm{H}^{i-|G_\alpha|-1}(\hom_\mathbb{Z}(\widetilde{\mathscr{C}}(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha), k)) \cong \widetilde{\mathrm{H}}^{i-|G_\alpha|-1}(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha; k).
\end{aligned}$$

Da k er et legeme, sluttes på baggrund af [5, Theorem 53.3], at som vektorrum over k, er

$$\widetilde{\mathrm{H}}^{i-|G_\alpha|-1}(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha; k) \cong \hom_k(\widetilde{\mathrm{H}}_{i-|G_\alpha|-1}(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha; k), k).$$

For et k-vektorrum af endelig dimension har det dual vektorrum samme dimension. Af ovenstående sluttes nu, at

$$\dim_k \widetilde{\mathrm{H}}^{i-|G_\alpha|-1}(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha; k) = \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|G_\alpha|-1}(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha; k).$$

På baggrund af dette konkluderes, at

$$\dim_k \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})_\alpha = \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|G_\alpha|-1}(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha; k).$$

Hvis der for et $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ gælder, at $H_\alpha \neq \emptyset$, følger det af Lemma C.4.2, at $\widetilde{\mathrm{H}}_\bullet(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}\, H_\alpha} G_\alpha; k) = 0$. For $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ med $H_\alpha \neq \emptyset$, vil Hilbertfunktionen for $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})$ i α således være nul. Ergo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})}(\boldsymbol{t}) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|G_\alpha|-1}(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha; k)\boldsymbol{t}^\alpha \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ H_\alpha = \emptyset}} \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|G_\alpha|-1}(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta H_\alpha} G_\alpha; k)\boldsymbol{t}^\alpha.
\end{aligned}$$

Defineres $\mathbb{Z}^n_- = \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$, sluttes direkte på baggrund af definitionen, at $H_\alpha = \emptyset$ netop hvis $\alpha \in \mathbb{Z}^n_-$. Hvis $H_\alpha = \emptyset$, vil $\mathrm{st}_\Delta H_\alpha = \Delta$. Herved haves, at

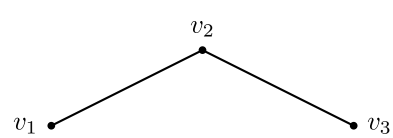
$$\mathcal{H}_{\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(k[\Delta])}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_-} \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|G_\alpha|-1}(\mathrm{lk}_\Delta G_\alpha; k)\boldsymbol{t}^\alpha.$$

Hvis $G_\alpha \notin \Delta$, vil $\mathrm{lk}_\Delta G_\alpha = \emptyset$, og per konvention er da $\widetilde{\mathscr{C}}(\mathrm{lk}_\Delta G_\alpha)$ nulkomplekset. Reduceret simplicial homologi for $\mathrm{lk}_\Delta G_\alpha$ med værdier i k er i dette tilfælde således altid nul, og derfor nuldimensional. Ergo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(k[\Delta])}(\boldsymbol{t}) &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n_- \\ G_\alpha \in \Delta}} \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|G_\alpha|-1}(\mathrm{lk}_\Delta G_\alpha; k)\boldsymbol{t}^\alpha \\
&= \sum_{F \in \Delta} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n_- \\ G_\alpha = F}} \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|F|-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k)\boldsymbol{t}^\alpha \\
&= \sum_{F \in \Delta} \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|F|-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n_- \\ G_\alpha = F}} \boldsymbol{t}^\alpha \\
&= \sum_{F \in \Delta} \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|F|-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n_0 \\ \mathrm{Supp}\,\alpha = F}} \boldsymbol{t}^{-\alpha} \\
&= \sum_{F \in \Delta} \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|F|-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) \prod_{v_j \in F} \frac{t_j^{-1}}{1 - t_j^{-1}},
\end{aligned}$$

idet den sidste lighed følger af Lemma 1.4.3. □

Eksempel 3.3.2. *Lad $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ og betragt det simpliciale kompleks $\Delta = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$, som visualiseres i figur 2. Lad k være et legeme og R den tilhørende Stanley-Reisnerring.*



FIGUR 2. Komplekset Δ

Det følger ved simple betragninger, at $\widetilde{\mathrm{H}}_1(\Delta; k) = 0$. For siderne $\{v_1\}$ og $\{v_3\}$ vil lænken være $\{\emptyset, \{v_2\}\}$. Da kædekomplekset svarende til dette kompleks er eksakt *følger, at den reducerede simpliciale homologi af grad* 0 *er nul. Idet lænken af* $\{v_2\}$ *er to punkter følger, at* $\widetilde{\mathrm{H}}_0(\mathrm{lk}_\Delta\{v_2\};k) \cong k$. *Siderne af dimension en i* Δ *er maksimale, så deres lænke er komplekset* $\{\emptyset\}$. *Da* $\widetilde{\mathrm{H}}_{-1}(\{\emptyset\};k) \cong k$, *giver Hochsters Sætning for* $i = 2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{H}^2_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})}(t_1,t_2,t_3) &= \frac{t_2^{-1}}{1-t_2^{-1}} + \frac{t_1^{-1}}{1-t_1^{-1}}\frac{t_2^{-1}}{1-t_2^{-1}} + \frac{t_2^{-1}}{1-t_2^{-1}}\frac{t_3^{-1}}{1-t_3^{-1}} \\ &= \frac{t_2^{-1}(1-t_1^{-1}t_3^{-1})}{(1-t_1^{-1})(1-t_2^{-1})(1-t_3^{-1})}\end{aligned}$$

Der bemærkes, at $\mathrm{H}^2_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}) \neq 0$, *og idet* $\dim R_\mathfrak{m} = 2$ *kan dette ses som et eksempel på Grothendiecks sætning.*

4. Cohen-Macaulaykomplekser

Der defineres nu Cohen-Macaulaykomplekser, som udgør et af hjørnestenene i beviset for den øvre grænse sætning for simpliciale sfærer.

Definition 4.0.3. *Lad* Δ *være et simplicialt kompleks på* V. *Lad* k *være et legeme. Komplekset* Δ *er et Cohen-Macaulaykompleks over* k, *hvis* $k[\Delta]$ *er en Cohen-Macaulayring. Det simpliciale kompleks* Δ *er et Cohen-Macualaykompleks, hvis der findes et legeme* k, *for hvilken* $k[\Delta]$ *er en Cohen-Macaulayring.*

Første vigtige resultat i den forbindelse er, at om et simplicialt kompleks er Cohen-Macaulay over et givent legeme viser sig kun at afhænge af reduceret simplicial homologi af delkomplekser med koefficienter i dette legeme. Dette er beskrevet i Reisners kriterium.

Sætning 4.0.4 (Reisners kriterium)**.** *Lad* Δ *være et simplicialt kompleks af dimension* $d-1$ *og* k *et legeme. Da er følgende betingelser ækvivalente:*

(R1) Δ *er Cohen-Macaulay over* k
(R2) $\widetilde{\mathrm{H}}_{i-|F|-1}(\mathrm{lk}_\Delta F;k) = 0$ *for alle* $F \in \Delta$ *og* $i < d$.
(R3) $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\mathrm{lk}_\Delta F;k) = 0$ *for alle* $F \in \Delta$ *og* $i < \dim \mathrm{lk}_\Delta F$.

Der vil først blive en indført en række begreber, som vil være centrale for beviset.

4.1. **Sammenhængende simpliciale komplekser.**

Definition 4.1.1. *Lad* Δ *være et simplicialt kompleks på* V. *Da kaldes* Δ *sammenhængende, hvis der for alle* $\{v\},\{v'\} \in \Delta$ *med* $v \neq v'$ *findes et* $m \in \mathbb{N}$ *og* $v_0,\dots,v_m \in V$, *så der for* $1 \leq i \leq m$ *gælder, at* $v_{i-1} \neq v_i$ *og* $\{v_{i-1},v_i\} \in \Delta$ *samt, at* $v_0 = v$ *og* $v_m = v'$.

Bemærkning 4.1.2. *Der haves, at definitionen af et sammenhængende simplicialt komplekse er ækvivalent med at den geometriske realisation er sammenhængende som topologisk rum.*

Sætning 4.1.3. *Lad* Δ *være et orienteret simplicialt kompleks på knudemængden* V *og* k *være et legeme. Hvis* $\Delta \neq \{\emptyset\}$ *gælder der, at* Δ *er sammenhængende hvis og kun hvis* $\widetilde{\mathrm{H}}_0(\Delta;k) = 0$.

Bevis. Lad δ_0 henholdsvis δ_1 være $\delta_0^{\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)} \otimes_\mathbb{Z} k$ og $\delta_1^{\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)} \otimes_\mathbb{Z} k$ som defineret i C.1.1. Da er $\widetilde{\mathrm{H}}_0(\Delta;k) = \ker\delta_0/\operatorname{im}\delta_1$. Der haves, at

$$\delta_0\colon \bigoplus_{\{v\}\in\Delta} k\{v\} \to k\emptyset,$$

er afbildningen givet ved, at for $\{v\} \in \Delta$, er $\delta_0(\{v\}) = \emptyset$. Herved følger, at

$$\ker\delta_0 = \operatorname{span}_k\{\{v\} - \{v'\} \mid \{v\},\{v'\} \in \Delta\}.$$

Antag Δ er sammenhængende og $\{v\},\{v'\} \in \Delta$, hvor $v \neq v'$. Lad $m \in \mathbb{N}$ og $v_0,\dots,v_m \in V$ være givet, så de opfylder Definition 4.1.1. Sæt for $1 \leq i \leq m$, $F_i = [v_{i-1}, v_i]$ hvis $v_{i-1} < v_i$ i ordningen på V og $F_i = -[v_i, v_{i-1}]$ hvis $v_{i-1} > v_i$ i ordningen på V. Da vil $F_i \in \widetilde{\mathscr{C}_1}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ og $\delta_1(F_i) = [v_{i-1}] - [v_i]$. Herved vil

$$\delta_1\left(\sum_{i=1}^{m} F_i\right) = \sum_{i=1}^{m}[v_{i-1}] - [v_i] = [v_0] - [v_m] = [v] - [v'],$$

så $\{v\} - \{v'\} \in \operatorname{im}\delta_1$. Da disse frembringer $\ker\delta_0$ som k-modul, sluttes, at $\ker\delta_0 = \operatorname{im}\delta_1$ og således vil $\widetilde{\mathrm{H}}_0(\Delta; k) = 0$.

Antag, at $\widetilde{\mathrm{H}}_0(\Delta; k) = 0$. Bemærk, at man kan skrive $\Delta = \bigcup_{i=1}^{\ell} \Delta_i$, hvor Δ_i er de maksimale sammenhængende delkomplekser og $\ell \in \mathbb{N}$. For $1 \leq i, j \leq \ell$, hvor $i \neq j$, vil $\Delta_i \cap \Delta_j = \{\emptyset\}$. Herved er for $r \geq 0$:

$$\widetilde{\mathscr{C}_r}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} k = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \widetilde{\mathscr{C}_r}(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{Z}} k.$$

Da der for $1 \leq i \leq \ell$ gælder at $\operatorname{im}\delta_1(\widetilde{\mathscr{C}_r}(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{Z}} k) \subseteq \widetilde{\mathscr{C}_r}(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{Z}} k$, vil:

$$\operatorname{im}\delta_1(\widetilde{\mathscr{C}_r}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} k) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \operatorname{im}\delta_1(\widetilde{\mathscr{C}_r}(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{Z}} k).$$

Lad $\{v\},\{v'\} \in \Delta$. Da vil $\{v\} - \{v'\} \in \ker\delta_0$, så af antagelserne følger, at $\{v\} - \{v'\} \in \operatorname{im}\delta_1$. Af ovenstående bemærkning følger, at dette er ækvivalent med at komponenten af $\{v\} - \{v'\}$ i hver sammenhængskomponent af Δ er i $\operatorname{im}\delta_1$. Lad Δ' være sammenhængskomponenten af Δ, som indeholder $\{v'\}$. Hvis $\{v\} \notin \Delta'$, vil der sluttes, at $\{v'\} \in \operatorname{im}\delta_1$. Da $\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ er et kædekompleks, vil således $0 = \delta_0(\{v'\})$. Men da $\delta_0(\{v\}) = 1 \neq 0$ fremkommer en modstrid. Herved konkluderes, at $\{v\}$ og $\{v'\}$ er i samme sammenhængskomponent af Δ. Da dette gælder for alle knuder i Δ, følger, at Δ er sammenhængende. □

4.2. **Rene simpliciale komplekser.**

Definition 4.2.1. *Et simplicialt kompleks Δ er* rent*, hvis der gælder, at* $\dim F = \dim\Delta$ *for alle maksimale sider $F \in \Delta$.*

Lemma 4.2.2. *Hvis Δ er et simplicialt kompleks af dimension $d-1$, vil der for alle $F \in \Delta$ gælde, at*

$$\dim \operatorname{lk}_{\Delta} F \leq d - |F| - 1.$$

Hvis Δ desuden er rent, vil der gælde lighed.

Bevis. Betragt $G' \in \operatorname{lk}_{\Delta} F$. Da vil $G' \cup F \in \Delta$ og $G' \cap F = \emptyset$, så

$$\dim(G' \cup F) = |G' \cup F| - 1 = |G'| + |F| - 1 = \dim G' + |F|.$$

Idet $G' \cup F \in \Delta$, er $\dim(G' \cup F) \leq \dim\Delta = d - 1$, hvorfor

$$\dim G' = \dim(G' \cup F) - |F| \leq d - |F| - 1.$$

Heraf følger, at

$$\dim \operatorname{lk}_{\Delta} F = \max\{\dim G' \mid G' \in \operatorname{lk}_{\Delta} F\} \leq d - |F| - 1.$$

Antag yderligere, at Δ er rent. Lad $G \in \Delta$ være en maksimal side, der indeholder F. Idet Δ er rent, er $\dim G = \dim\Delta = d - 1$. Der gælder, at $G \setminus F \in \operatorname{lk}_{\Delta} F$, og

$$\dim(G \setminus F) = |G \setminus F| - 1 = |G| - |F| - 1 = d - |F| - 1,$$

så $\dim \operatorname{lk}_{\Delta} F \geq d - |F| - 1$. □

Lemma 4.2.3. *Lad Δ være et sammenhængende kompleks, hvor* $\operatorname{lk}_{\Delta}\{v\}$ *er rent, for alle $\{v\} \in \Delta$. Da vil Δ være rent.*

Bevis. Lad $F, F' \in \Delta$ være to maksimale sider. Der vil blive vist, at $|F| = |F'|$.

Antag først, at $F \cap F' \neq \emptyset$. Da findes $\{v\} \in \Delta$, så $v \in F \cap F'$. Da vil $F \setminus \{v\}, F' \setminus \{v\} \in \operatorname{lk}_\Delta\{v\}$. Der gælder, at disse er maksimale i $\operatorname{lk}_\Delta\{v\}$. Hvis nemlig $F \setminus \{v\} \subseteq G$ for et $G \in \operatorname{lk}_\Delta\{v\}$, vil $F \subseteq G \cup \{v\}$, hvor $G \cup \{v\} \in \Delta$, så af maksimalitetsbetingelserne sluttes, at $F = G \cup \{v\}$ og således $F \setminus \{v\} = G$. Idet $\operatorname{lk}_\Delta\{v\}$ er rent konkluderes herved, at $|F \setminus \{v\}| = |F' \setminus \{v\}|$ og således $|F| = |F'|$.

Antag nu, at $F \cap F' = \emptyset$. Lad $v \in F$ og $v' \in F'$. Da Δ er sammenhængende findes i henhold til definition $m \in \mathbb{N}$ og $v_0, \dots, v_m \in V$, så $\{v_{i-1}, v_i\} \in \Delta$ for $1 \leq i \leq m$ og der gælder, at $v_0 = v$ og $v_m = v'$. Vælg for $1 \leq i \leq m$ et $G_i \in \Delta$, så $\{v_{i-1}, v_i\} \subseteq G_i$ og G_i er maksimal i Δ. Da vil $v_{i-1} \in G_{i-1} \cap G_i$ for $2 \leq i \leq m$, og da G_{i-1} og G_i begge er maksimale sider i Δ, giver ovenstående argument, at

$$|G_{i-1}| = |G_i|, \quad \text{for } 2 \leq i \leq m.$$

Tilsvarende vil $v \in F \cap G_1$ og $v' \in F' \cap G_m$ og da disse er maksimale i Δ, vil ligeledes $|F| = |G_1|$ og $|F'| = |G_m|$. Da ses direkte, at $|F| = |F'|$. Der gælder således, at alle maksimale sider i Δ har samme dimension. Per definition findes en side i Δ af dimension $\dim \Delta$ og denne må være maksimal. Herved sluttes, at alle maksimale sider i Δ har dimension $\dim \Delta$, hvorved Δ er rent. □

4.3. **Reisners kriterium.**

Lemma 4.3.1. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og k et legeme. Hvis Δ opfylder betingelse (R3), vil det simpliciale kompleks $\operatorname{lk}_\Delta F$ for $F \in \Delta$ ligledes opfylde betingelse (R3).*

Bevis. Lad $F \in \Delta$ og $G \in \operatorname{lk}_\Delta F$. Bemærk, at der haves, at $F \cup G \in \Delta$. Af Lemma C.4.1 følger, at $\operatorname{lk}_{\operatorname{lk}_\Delta F} G = \operatorname{lk}_\Delta(F \cup G)$. Af antagelserne følger nu, at for $i < \dim \operatorname{lk}_{\operatorname{lk}_\Delta F} G = \dim \operatorname{lk}_\Delta(F \cup G)$ vil

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(\operatorname{lk}_{\operatorname{lk}_\Delta F} G; k) = \widetilde{\mathrm{H}}_i(\operatorname{lk}_\Delta(F \cup G); k) = 0. \qquad \square$$

Lemma 4.3.2. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og k et legeme. Hvis Δ opfylder betingelse (R3), vil Δ være rent.*

Bevis. Der benyttes induktion efter $\dim \Delta$ til at vise, at ethvert simplicialt kompleks Δ, der opfylder betingelse (R3), er rent.

Lad Δ være et simplicialt kompleks, der opfylder betingelse (R3). Hvis $\dim \Delta = -1, 0$, er det oplagt, at Δ er rent. Antag nu, at $\dim \Delta = d - 1 > 0$. Af Lemma 4.3.1 følger, at $\operatorname{lk}_\Delta\{v\}$ for $\{v\} \in \Delta$ opfylder betingelserne i lemmaet. Af Lemma 4.2.2 følger, at

$$\dim \operatorname{lk}_\Delta\{v\} \leq d - 1 - |\{v\}| = d - 2 < \dim \Delta.$$

Induktionsantagelsen medfører herved, at $\operatorname{lk}_\Delta\{v\}$ er rent for alle $\{v\} \in \Delta$.

Her haves, at $\emptyset \in \Delta$ og opfylder, at $\operatorname{lk}_\Delta \emptyset = \Delta$, hvorfor $\dim \operatorname{lk}_\Delta \emptyset = d - 1 > 0$. Herved haves, at

$$\widetilde{\mathrm{H}}_0(\Delta; k) = \widetilde{\mathrm{H}}_0(\operatorname{lk}_\Delta \emptyset; k) = 0.$$

Da dimensionen af Δ er positiv, vil Δ være forskellig fra $\{\emptyset\}$. Af Sætning 4.1.3 konkluderes, at Δ er sammenhængende. Af Lemma 4.2.3 følger nu, at Δ er rent. □

Bevis for Reisners kriterium Sætning 4.0.4. Lad $\dim \Delta = d - 1$. Per definition er Δ Cohen-Macaulay over k netop hvis Stanley-Reisnerringen $R = k[\Delta]$ er Cohen-Macaulay. Ringen $(R, \mathfrak{m})$, hvor $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$, er *lokal ifølge Lemma 1.4.6. At R er Cohen-Macaulay er således jævnfør Sætning A.5.2 ækvivalent med, at $R_\mathfrak{m}$ er Cohen-Macaulay. Jævnfør Lemma 2.3.2 til Grothendiecks Sætning er dette ækvivalent med, at for alle $i < \dim R_\mathfrak{m}$ er $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}) = 0$.

Tidligere er $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})$ for et $i \in \mathbb{Z}$ blevet udstryret med en $\mathbb{Z}^n$-graduering som R-modul. Der gælder således, at som k-vektorrum vil

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})_\alpha.$$

Herved er $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}) = 0$ hvis og kun hvis $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})_\alpha = 0$ for alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Da sluttes, at $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}) = 0$ netop hvis Hilbertserien $\mathcal{H}_{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})}(\boldsymbol{t})$ er nulpolynomiet. Af Sætning 3.0.5 følger, at Hilbertserien er nulpolynomiet netop når der for alle $F \in \Delta$ haves, at $\widetilde{\mathrm{H}}_{i-|F|-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) = 0$. Ifølge Korollar 1.3.6 er $\dim R_\mathfrak{m} = d$, så der konkluderes, at Δ er Cohen-Macaulay over k netop hvis (R2) er opfyldt. Der vil nu blive vist, at denne betingelse er ækvivalent med (R3).

Antag (R2) er sandt. Lad $F \in \Delta$ med $|F| < d$. Da vil

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) = \widetilde{\mathrm{H}}_{|F|-|F|-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) = 0.$$

For det simpliciale kompleks $\{\emptyset\}$, vil kædekomplekset $\widetilde{\mathscr{C}}(\{\emptyset\}) \otimes k$ opfylde, at

$$(\widetilde{\mathscr{C}}(\{\emptyset\}) \otimes k)_{-1} \cong k, \quad (\widetilde{\mathscr{C}}(\{\emptyset\}) \otimes k)_i = 0 \text{ for } i \neq -1.$$

Herved sluttes, at $\widetilde{\mathrm{H}}_{-1}(\{\emptyset\}; k) \cong k$. Der må således gælde, at $\mathrm{lk}_\Delta F \neq \{\emptyset\}$. Der findes derfor $G \subseteq V$, $G \neq \emptyset$, så $G \cup F \in \Delta$ og $G \cap F = \emptyset$. Under de givne betingelser vil $F \subsetneq F \cup G$, og da $F \cup G \in \Delta$, vil F ej være maksimal. Der gælder således, at hvis F er maksimal i Δ, må $|F| = d$. På baggrund af dette sluttes, at Δ er rent. Af Lemma 4.2.2 følger nu, at for alle $F \in \Delta$ vil $\dim \mathrm{lk}_\Delta F = d - |F| - 1$. Lad $F \in \Delta$ og $i < \dim \mathrm{lk}_\Delta F$. Da vil $i + |F| + 1 < d$, så af antagelsen (R2) følger,

$$0 = \widetilde{\mathrm{H}}_{(i+|F|+1)-|F|-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) = \widetilde{\mathrm{H}}_i(\mathrm{lk}_\Delta F; k).$$

Der observeres, at dette netop er betingelse (R3).

Antag betingelse (R3) holder for Δ. Af Lemma 4.3.2 følger nu, at Δ er rent. Lad $F \in \Delta$ og $i < d$. På baggrund af Lemma 4.2.2 sluttes, at $\dim \mathrm{lk}_\Delta F = d - |F| - 1$, hvorfor $i - |F| - 1 < \dim \mathrm{lk}_\Delta F$. Af betingelse (R3) følger nu, at

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{i-|F|-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) = 0.$$

Der kan således konkluderes, at betingelse (R2) er opfyldt. □

Korollar 4.3.3. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og k et legeme. Hvis Δ er Cohen-Macaulay over k, er Δ rent.*

Bevis. Følger umiddelbart af Reisners kriterium og Lemma 4.3.2. □

Korollar 4.3.4. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og k et legeme. Hvis Δ er Cohen-Macaulay over k, er $\mathrm{lk}_\Delta F$ for $F \in \Delta$ ligeledes Cohen-Macaulay over k.*

Bevis. Følger direkte ved at sammenholde Reisners kriterium og Lemma 4.3.1. □

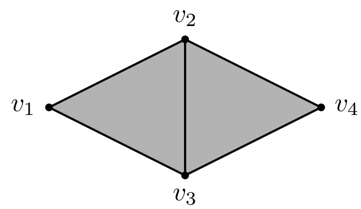
Bemærkning 4.3.5. *For ethvert orienteret simplcialt kompleks Δ og legeme k, er $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta; k) = 0$ for $i < -1$. Hvis $\Delta \neq \{\emptyset\}$ er ligeledes $\widetilde{\mathrm{H}}_{-1}(\Delta; k) = 0$. For at tjekke betingelse (R3) i Reisners kriterium, er det således nok at undersøge om $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\mathrm{lk}_\Delta F; k) = 0$ for $0 \leq i < \dim \mathrm{lk}_\Delta F$ for de $F \in \Delta$ med $\dim \mathrm{lk}_\Delta F > 0$.*

Eksempel 4.3.6. *Lad $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ og*

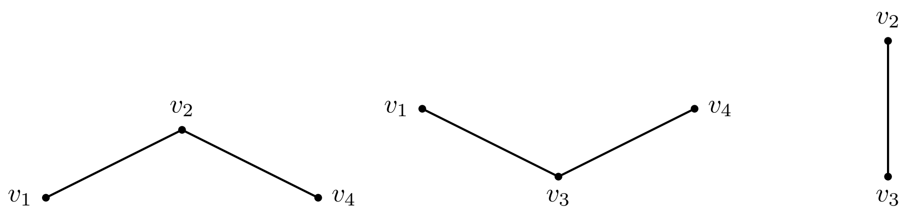
$$\Delta = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \\ \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}.$$

Da er Δ er simplicialt kompleks på V af dimension 2, og kan visualiseres ved figur 3. Lad k være et legeme. I henhold til Lemma 1.3.3 er $I_\Delta = (X_4) \cap (X_1) = (X_1 X_4)$ og Stanley-Reisnerringen er således

$$k[\Delta] = k[X_1, X_2, X_3, X_4]/(X_1 X_4).$$



FIGUR 3. Komplekset Δ



(A) $\mathrm{lk}_\Delta\{v_3\}$ (B) $\mathrm{lk}_\Delta\{v_2\}$ (C) $\mathrm{lk}_\Delta\{v_1\}$, $\mathrm{lk}_\Delta\{v_4\}$

FIGUR 4. Lænker.

Udstyres V med den lineære ordning bestemt ved $v_i < v_j$ hvis $i < j$, vil Δ være et orienteret kompleks. Lad δ_i være afbildningerne $\delta_i^{\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ fra Bilag C. Da vil $\delta_1 \colon \widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)_1 \otimes_{\mathbb{Z}} k \to \widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)_0 \otimes_{\mathbb{Z}} k$ være givet ved

$$\begin{aligned} &\delta_1(a_1[v_1,v_2] + a_2[v_1,v_3] + a_3[v_2,v_3] + a_4[v_2,v_4] + v_5[v_3,v_4]) \\ &\qquad = (a_1+a_2)[v_1] + (-a_1+a_3+a_4)[v_2] + (-a_2-a_3+a_5)[v_3] + (-a_4-a_5)[v_4]. \end{aligned}$$

Af dette følger, at $\ker \delta_1 = \operatorname{im} \delta_2$ og således $\widetilde{\mathrm{H}}_1(\Delta; k) = 0$. Da Δ er sammenhængende, vil $\widetilde{\mathrm{H}}_0(\Delta; k) = 0$.

For $F \in \Delta$ af dimension nul, vil lænken være et komplekserne i figur 4. I alle tilfælde er der tale om sammenhængende komplekser, så der haves, at $\widetilde{\mathrm{H}}_0(\mathrm{lk}_\Delta F; k) = 0$. Hvis $F \in \Delta$ har dimension et eller to, vil $\mathrm{lk}_\Delta F$ have dimension 0 eller -1. I overenstemmelse med ovenstående bemærkning haves nu, at Δ opfylder betingelse (R3), hvorved Δ er Cohen-Macaulay over k i henhold til Reisners kriterium.

5. POLYTOPER

Fra generel teori om polytoper stammer begrebet h-vektor, som er analog til det tilsvarende begreb for simpliciale komplekser. I dette kapitel vil det blive vist, hvorledes h-vektoren for cykliske polytoper kan beregnes.

5.1. **Generelle definitioner.** For en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er det konvekse hylster af A den mindste konvekse mængde i $\mathbb{R}^m$, der indeholder A. Denne betegnes $\operatorname{conv} A$.

Definition 5.1.1. *En polytop P i $\mathbb{R}^m$ er det konvekse hylster af et endeligt antal punkter i $\mathbb{R}^m$.*

Definition 5.1.2. *Lad P være en polytop i $\mathbb{R}^m$ og H et hyperplan i $\mathbb{R}^m$. Antag, at P er indeholdt i en af de afsluttede delrum bestemt af H og $H \cap P \neq \emptyset$. Da kaldes H et støttende hyperplan for P og $H \cap P$ en side i P.*

For en polytop P vil både $\emptyset$ og P betragtes som sider i P. En *ægte side* i P er da en side i P, som er forskellig fra $\emptyset$ og P. Der gælder, at en side en en polytop selv udgør en polytop. For en side F i P, er dimensionen af F dimension af det affine hylster af F som underrum af $\mathbb{R}^m$. Dimensionen af polytopen P er således dimensionen af det affine hylster af P. En side af dimension 0 i P er således et punkt i P, og disse kaldes hjørner i P. Mængden af hjørner for P betegnes vert P.

Det følger af [8, Theorem 1], at for en polytop findes kun et endeligt antal sider af denne, hvorfor man kan definere:

Definition 5.1.3. *For en polytop P af dimension d, er f-vektoren*

$$f(P) = (f_{-1}(P), f_0(P), \dots, f_{d-1}(P)),$$

hvor der for $i \geq 0$ haves, at $f_i(P)$ er antallet af i-dimensionale sider i P, mens $f_{-1}(P) = 1$. Analogt til h-vektoren for simpliciale komplekser defineres h-vektoren for en d-polytop $h(P) = (h_0(P), \dots, h_d(P))$ på baggrund af ligningen:

$$\sum_{i=0}^{d} h_i(P)t^i = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(P)t^i(1-t)^{d-i}.$$

Bemærk, at da denne definition stemmer overens med den tilsvarende for simpliciale komplekser, vil beregningerne i Lemma 1.5.1 og Lemma 1.5.4 ligeledes gælde for d-polytoper.

Definition 5.1.4. *Det konvekse hylster af $d+1$ affint uafhængige punkter i $\mathbb{R}^m$ kaldes en d-simpleks i $\mathbb{R}^m$. En polytop P i $\mathbb{R}^m$ kaldes simplicial, hvis enhver ægte side i P er et simpleks.*

For simpliciale polytoper gælder følgende vigtige relation

Sætning 5.1.5 (Dehn-Sommervilles ligninger)**.** *For en simplicial d-polytop P i $\mathbb{R}^m$, vil h-vektoren opfylde, at $h(P)_k = h(P)_{d-k}$ for $k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$.*

Et bevis forefindes i [8, 5.1].

5.2. **Cykliske polytoper.**

Definition 5.2.1. *Definer for $d \in \mathbb{N}$ og $t \in \mathbb{R}$ den algebraiske kurve M ved parametriseringen:*

$$x(t) = (t, t^2, \dots, t^d) \in \mathbb{R}^d.$$

Lad $n \in \mathbb{Z}$ opfylde, at $n \geq d+1$. Det konvekse hylster i $\mathbb{R}^d$ af n forskellige punkter på M kaldes en cyklisk polytop *af type $C(n,d)$.*

Bemærk at for en cyklisk polytop P i $\mathbb{R}^d$ af type $C(n,d)$ kan der findes reelle tal $t_1 < \cdots < t_n$, så $P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ hvor $x_i = x(t_i)$ for $1 \leq i \leq n$. I det efterfølgende vil cykliske polytoper altid være beskrevet på denne måde. Et eksempel på en cyklisk polytop af type $C(4,2)$ findes i figur 5. Det ses typeligt, at denne har fire hjørner og 4 sider af dimension et.

Lemma 5.2.2. *Ethvert hyperplan i $\mathbb{R}^d$ indeholder højst d punkter fra M.*

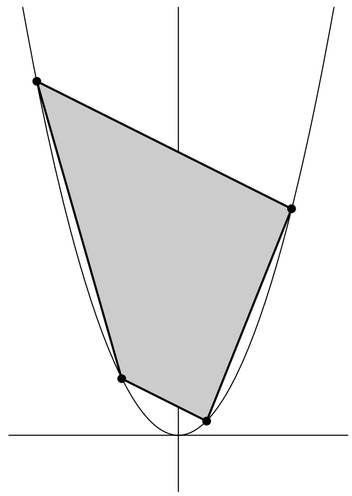
Bevis. Et hyperplan i $\mathbb{R}^d$ er af formen $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}$, hvor $y \in \mathbb{R}^d$ er forskellig fra nulvektoren og $\alpha \in \mathbb{R}$. Hvis $y = (y_1, \dots, y_d)$, vil $x(t) \in H$ for et $t \in \mathbb{R}$ hvis og kun hvis

$$y_1 t + \ldots + y_d t^d = \alpha.$$

Da y ikke er nulvektoren følger resultatet af algebraens fundamentalsætning. □

Lemma 5.2.3. *For et $d \in \mathbb{N}$, vil der for $t_1, \dots, t_{d+1}$ forskellige reelle tal gælde, at $x(t_1), \dots, x(t_{d+1})$ er affint uafhængige.*

Bevis. Antag, at $x(t_1), \dots, x(t_{d+1})$ er affint afhængige. Da findes et affint underrum af $\mathbb{R}^d$, som indeholder $x(t_1), \dots, x(t_{d+1})$ og har dimension $d-1$. Et affint underrum af $\mathbb{R}^d$ af dimension $d-1$ er et hyperplan, så Lemma 5.2.2 fremkommer en modstrid. □



FIGUR 5. Cyklisk polytop

Lemma 5.2.4. *For $d \in \mathbb{N}$ og $n \geq d+1$ vil en cyklisk polytop P af type $C(n,d)$ være en polytop af dimension d.*

Bevis. Da $n \geq d+1$, vil der i henhold til Lemma 5.2.3 findes $d+1$ affint uafhængige punkter i P, hvorfor det affine hylster af P har dimension mindst d. Idet det affine hylster af P er et affint underrum af $\mathbb{R}^d$, har det dimension højst d. □

Sætning 5.2.5. *Lad $d \in \mathbb{N}$ og $n \geq d+1$. Lad $P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ være en cyklisk polytop af type $C(n,d)$. For enhver delmængde $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ af $\{x_1, \dots, x_n\}$ med $1 \leq k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, vil $\operatorname{conv}\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ være en side i P.*

Bevis. Lad $1 \leq k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ og betragt $\{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}\} \subseteq \{t_1, \dots, t_n\}$. Definer polynomiet $p(t) = \prod_{j=1}^{k}(t - t_{i_j})^2 \in \mathbb{R}[t]$. Da er $p(t)$ et polynomium af grad $2k \leq d$, hvorfor man kan skrive $p(t) = \sum_{i=0}^{2k} a_i t^i$. På baggrund af dette defineres nu vektoren $y = (a_1, a_2, \dots, a_{2k}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$. Da $a_{2k} \neq 0$, er y ikke nulvektoren. Herved er

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle = -a_0\}$$

en hyperplan i $\mathbb{R}^d$. Lad $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle \geq -a_0\}$. For $t \in \mathbb{R}$ er $\langle x(t), y \rangle + a_0 = p(t)$. Da $p(t) \geq 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, vil $x(t) \in H^+$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Det følger, at for $t \in \mathbb{R}$ vil $x(t) \in H$ netop hvis $p(t) = 0$, hvilket kun forekommer for $t \in \{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}\}$.

Da P er det konvekse hylster af $\{x_1, \dots, x_n\}$, har elementer i P formen

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \text{hvor } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Da vil

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i, y \rangle \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (-a_0) = -a_0,$$

så der sluttes, at $P \subseteq H^+$. Af ovenstående haves også, at $x \in H$ hvis og kun hvis der for alle $1 \leq i \leq n$ med $\lambda_i > 0$ gælder $x_i \in H$. Af ovenstående haves, at $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ er de eneste punkter blandt $\{x_1, \dots, x_n\}$, som ligger i H, hvorved der sluttes, at $H \cap P = \operatorname{conv}\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$. Da H er et støttende hyperplan for P, følger det, at $\operatorname{conv}\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ er en side i P. □

Korollar 5.2.6. *Lad $d > 1$ og $n \geq d+1$. Hvis $P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ er en cyklisk polytop af type $C(n,d)$, vil $\operatorname{vert} P = \{x_1, \dots, x_n\}$.*

Bevis. Da $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$, følger inklusionen "$\subseteq$" direkte af [1, Theorem 7.2]. Da $d > 1$, vil $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor \geq 1$, hvorfor der af Sætning 5.2.5 konkluderes, at for alle $1 \leq j \leq n$, vil $\text{conv}\{x_j\} = \{x_j\}$ være en side i P. Da denne side har dimension 0, følger resultatet. ☐

Sætning 5.2.7. *Lad $d > 1$, $n \geq d+1$. Hvis $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ er en cyklisk polytop af type $C(n, d)$, er P en simplicial d-polytop.*

Bevis. Af Lemma 5.2.4 følger, at P er en d-dimensionel polytop. Lad F være en side i P af dimension $d-1$. Af [1, Theorem 7.3] følger, at F er en polytop og $\text{vert}\, F = \text{vert}\, P \cap F$. På baggrund af Korollar 5.2.6 følger nu, at $\text{vert}\, F = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ for et $k \in \mathbb{N}_0$. Da F har dimension $d-1$, må der gælde, at $k \geq d$. Der haves, at det affine hylster af F er et $d-1$ dimensionelt underrum af $\mathbb{R}^d$ og således et hyperplan. Da dette hyperplan indeholder k punkter fra M følger det af Lemma 5.2.2, at der gælder $k \leq d$. Således haves, at $k = d$. Da enhver delmængde af et affint uafhængigt sæt er affint uafhængigt, sluttes der på baggrund af Lemma 5.2.3, at $x_{i_1}, \dots, x_{i_d}$ er affint uafhængigt, hvorfor F er en simpleks. Af [1, Theorem 12.9] konkluderes nu, at polytopen P er simplicial. ☐

Lemma 5.2.8. *Lad $n \geq 2$ og $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ være en cykliske polytope af type $C(n, 1)$. Da er $f(P) = (1, 2)$.*

Bevis. Bemærk, at da $x_i = t_i$ for $1 \leq i \leq n$, vil da $x_1 = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ og $x_n = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Derved følger, at $P = \{t \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq t \leq x_n\}$. Et hyperplan i $\mathbb{R}$ netop er et punkt, så der findes kun to støttende hyperplaner for P nemlig $H_{x_1} = \{t \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq t\}$ og $H_{x_n} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \leq x_n\}$ og således netop to hjørner for P. Siderne i P er således $\emptyset, \{x_1\}, \{x_n\}$ og P, og f-vektoren $f(P) = (1, 2)$. ☐

Lemma 5.2.9. *Lad $d > 1$ og $n \geq d+1$. Lad P være en cyklisk polytop af type $C(n, d)$. For et $0 \leq k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, vil*

$$f_{k-1}(P) = \binom{n}{k}.$$

Bevis. Lad $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$. For $k = 0$ er $f_{-1}(P) = 1$ per definition, og ligledes er $\binom{n}{0} = 1$. Antag derfor $k > 0$.

Lad F være en side i P af dimension $k-1$. Af [1, Theorem 7.3] følger, at F er en polytop og $\text{vert}\, F = \text{vert}\, P \cap F$. På baggrund af Korollar 5.2.6 følger nu, at $\text{vert}\, F = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}\}$ for et $1 \leq \ell \leq n$. Da P er simplicial i henhold til Sætning 5.2.7, konkluderes der, at $\ell = k$. For en delmængde $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ af $\{x_1, \dots, x_n\}$ haves, at $F' = \text{conv}\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ er en side i P i overensstemmelse med Sætning 5.2.5. På baggrund af Lemma 5.2.3 sluttes der, at $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ er en affin uafhængig mængde, hvorfor siden F' har dimension $k-1$.

Siderne i P af dimension $k-1$ svarer bijektivt til delmængder af $\{x_1, \dots, x_n\}$ med k elementer, hvorfor resultatet følger af definitionen af binomialkoefficienten. ☐

Korollar 5.2.10. *Lad $d > 1$ og $n \geq d+1$. Lad P være en cyklisk polytop af type $C(n, d)$. For et $0 \leq k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, vil*

$$h_k(P) = \binom{n-d+k-1}{k}.$$

Bevis. Fra Lemma 1.5.1 og Lemma 5.2.9, sluttes, at

$$h_k(P) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} f_{i-1}(P) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} \binom{n}{i}.$$

Af basale binominalidentitet haves, at $(-1)^{k-i}\binom{d-i}{k-i} = \binom{k-d-1}{k-i}$, hvorfor

$$h_k(P) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k-d-1}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{n+k-d-1}{k}$$

i henhold til Vandermondes identitet [1, App. 3] □

Lad $d \in \mathbb{N}$ og $n \geq d+1$. Betragt P en cyklisk polytop af type $C(n,d)$. For $d = 1$ følger det af Lemma 5.2.8, at f-vektoren for P ikke afhænger af valget på punkter på kurven M. Hvis $d > 1$ følger det af Sætning 5.2.7, at P er en simplicial d-polytop. På baggrund af Dehn-Sommervilles ligninger konkluderes, at h-vektoren for P er entydigt bestemt af værdierne $h_0(P), \ldots, h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(P)$. Af Korollar 5.2.10, sluttes, at h-vektoren for P kun afhænger af typen $C(n,d)$. Da f-vektoren for en polytop er entydigt bestemt på baggrund af h-vektoren, kan tilsvarende konkluderes om f-vektoren for en cyklisk polytop. Der gælder således, at f- og h-vektoren for en cyklisk polytop kun afhænger af typen $C(n,d)$, hvorfor man kan benytte notationen $f(C(n,d))$ og $h(C(n,d))$ for $d \in \mathbb{N}$ og $n \geq d+1$.

Bemærkning 5.2.11. *Lad $\mathscr{F}(P)$ for en polytop P være mængden af sider i P. Ordnes disse ved inklusion, vil $(\mathscr{F}(P), \subseteq)$ være et gitter, og dette betegnes sidegitteret for P. To polytoper i $\mathbb{R}^m$ er ækvivalente, hvis deres sidegitre er isomorfe. Det følger let, at ækvivalente polytoper har samme f- og h-vektor. Der gælder, at to cykliske polytoper af samme type er ækvivalente i denne forstand.*

De cyliske polytoper afhænger desuden heller ikke af den valgte algebraiske kurve. Man kan benytte enhver kurve i $\mathbb{R}^d$ som opfylder, at ethvert hyperplan højest indeholder d punkter fra kurven. Der gælder nemlig, at det konvekse hylster af $n \geq d+1$ forskellige punkter på sådanne en kurve vil være ækvivalent med en cyklisk polytop af type $C(n,d)$ defineret på baggrund af kurven M. Kurven M er et meget simpelt eksempel på en algebraisk kurve med denne egenskab, hvorfor de efterfølgende beregninger forenkles.

6. Den øvre grænse sætning for Cohen-Macaulay- og Eulerkomplekser

Inspireret af, at h-vektoren for cykliske polytoper er bestemt via kendskabet til de første halvdel af værdierne og Dehn-Sommervilles ligninger, vil der blive vist, at for en særlig type af simpliciale komplekser, nemlig Cohen-Macaulay- og Eulerkomplekser, vil h-vektoren opfylde lignende betingelser. Disse resultater udmunder naturlig i

Sætning 6.0.12 (Den øvre grænse sætning for komplekser)**.** *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V, som opfylder, at $\dim \Delta = d-1 \geq 0$, samt at Δ er både et Euler- og Cohen-Macaulaykompleks. Hvis $n = |V|$, vil der for $-1 \leq i \leq d-1$ gælde, at $f_i(\Delta) \leq f_i(C(n,d))$.*

6.1. h-vektoren for Cohen-Macaulaykomplekser.

For komplekser, der er Cohen-Macaulay, gælder følgende grænser for h-vektoren:

Sætning 6.1.1. *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V af dimension $d-1$. Antag $|V| = n$ og at Δ er et Cohen-Maculaykompleks. Da vil h-vektoren for Δ opfylde, at for $0 \leq i \leq d$ vil*

$$0 \leq h_i(\Delta) \leq \binom{n-d+i-1}{i}.$$

Bevis. Bemærk, af Lemma 1.5.1 sluttes, at $h_0 = 1$. Der haves, at $\binom{n-d-1}{0} = 1$, så sætningen er trivielt opfyldt for $i = 0$.

Lad k være et legeme, så $k[\Delta]$ er en Cohen-Macaulayring. Antag k er endelig. Betragt da

$$k(Y) = \left\{ \frac{f(Y)}{g(Y)} \mid f(Y), g(Y) \in k[Y], g(Y) \neq 0 \right\}.$$

Bemærk, at dette er et uendeligt legeme. Der gælder, at $k(Y)$ på naturlig vis kan betragtes som en udvidelse af legemet k. Der haves, at $k[\Delta]$ er en Noethersk ring og en endeligt frembragt k-algebra. Af [2, Theorem 2.1.10.] følger nu, at $k[\Delta] \otimes_k k(Y)$ er en Cohen-Macaulayring. Da $k \otimes_k k(Y) \cong k(Y)$ som ringe, og $k[\Delta]$ er en k-algebra, haves nu, at $k[\Delta] \otimes_k k(Y) \cong k(Y)[\Delta]$ som ringe. Herved sluttes, at Δ er et Cohen-Macaulaykompleks over $k(Y)$.

Da h-vektoren for Δ ikke afhænger af legemet k, kan der herved kan antages, at k er uendelig. Lad $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$, hvor x_i er restklassen af X_i i $k[\Delta]$. Da er $\mathfrak{m}$ et maksimalideal i $k[\Delta]$, så da $k[\Delta]$ er en Cohen-Macaulayring, er $k[\Delta]_\mathfrak{m}$ en Cohen-Macaulayring. Der haves, at $(k[\Delta]_\mathfrak{m}, \mathfrak{m}k[\Delta]_\mathfrak{m})$ er en lokal Noethersk ring. Af deifinitionen for Cohen-Macaulayringe, følger således, at $\operatorname{depth} k[\Delta]_\mathfrak{m} = \dim k[\Delta]_\mathfrak{m}$. Af [2, Theorem 2.1.3.] følger, at $\operatorname{depth}_\mathfrak{m}(k[\Delta]) = \operatorname{depth} k[\Delta]_\mathfrak{m}$. På baggrund af Korollar 1.3.6 sluttes, at $d = \dim k[\Delta]_\mathfrak{m}$, hvorfor ovenstående giver, at $d = \operatorname{depth}_\mathfrak{m}(k[\Delta])$.

Der haves, at $k[\Delta]$ er en Noethersk $\mathbb{Z}$-gradueret ring, hvor $\mathfrak{m}$ er frembragt af homogene elementer af grad 1. Desuden er $k[\Delta]_0 = k$, som er et uendeligt legeme og således også en lokal ring med uendeligt restklasselegeme. Af [2, Proposition 1.5.12] sluttes nu, at der findes en $k[\Delta]$-følge $\boldsymbol{y} = y_1, \ldots, y_d$, hvor $y_i \in k[\Delta]$ er homogent af grad 1.

Betragt nu ringen $R = k[\Delta]/(\boldsymbol{y})$. Af Korollar A.3.3 følger nu, at Krull-dimensionen af R som $k[\Delta]$-modul opfylder at $\dim R \leq \dim k[\Delta] - d = 0$. Da $\boldsymbol{y}$ er en regulær følge, er $R \neq 0$, hvorfor $\dim R \geq 0$. Herved sluttes at $\dim R = 0$.

Da $\boldsymbol{y}$ består af homogene elementer, vil $\mathbb{Z}$-gradueringen på $k[\Delta]$ på naturlig vis give en $\mathbb{Z}$-graduering af R som $k[\Delta]$-modul. Lad $\mathrm{H}_R(t)$ være Hilbertserien for R med hensyn til denne $\mathbb{Z}$-graduering. Da R er et endeligt frembragt $k[\Delta]$-modul, findes jævnfør [2, Korollar 4.1.8], et $Q_R(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, så

$$\mathcal{H}_R(t) = \frac{Q_R(t)}{(1-t)^{\dim R}} = Q_R(t).$$

Betragtes $k[\Delta]$ som gradueret $k[\Delta]$-modul vil det være endeligt frembragt. Af [2, Bemærkning 4.1.11.] følger da, at $Q_{k[\Delta]}(t) = Q_R(t)$. Koefficienterne i en Hilbertserie er dimensioner af vektorrum, og således altid ikke-negative. Da h-vektoren for Δ er koefficenterne i $Q_{k[\Delta]}(t)$, konkluders der, at h-vektoren for Δ består af er koefficienten i Hilbertserien $\mathcal{H}_R(t)$, og derved vil $0 \leq h_i(\Delta)$ for alle $1 \leq i \leq d$.

Der haves, at $k[\Delta]_1 = \bigoplus_{i=1}^n kx_i$. Herved kan der for $i = 1, \ldots, d$ vælges $Y_i \in \bigoplus_{i=1}^n kX_i$, så restklassen af Y_i i $k[\Delta]$ er y_i. Da $\boldsymbol{y}$ er en $k[\Delta]$-regulær følge, sluttes der af definitionen af regulær følge, at $y_1, \ldots, y_d$ er lineært uafhængige over k. Således vil $Y_1, \ldots, Y_d$ også være lineært uafhængige over k. Herved kan den suppleres til en basis

$$Y_1, \ldots, Y_d, Z_1, \ldots, Z_{n-d}$$

for det n-dimensionale vektorrum $\bigoplus_{i=1}^n kX_i$. Lad z_i betegne restklassen af Z_i i $k[\Delta]$ for $1 \leq i \leq n-d$. Da vil $z_1, \ldots, z_{n-d} \in k[\Delta]_1$, og

$$y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_{n-d}$$

frembringer $k[\Delta]_1$ som vektorrum over k. For et $i > 0$ er vektorrummet $k[\Delta]_i$ frembragt af alle monomier i $x_1, \ldots, x_n$ af grad i, så det konkluderes, at $k[\Delta]_i$ ligledes er frembragt af alle monomier i $y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_{n-d}$ af grad i. Med den givne graduering af R, vil R_i være frembragt som vektorrum over k af restklasserne af disse. Da $[y_j]_{(\boldsymbol{y})} = 0$ for $1 \leq j \leq d$, konkluderes, at for $i > 0$ vil R_i være frembragt som k-vektorrum af monomier i $[z_1]_{(\boldsymbol{y})}, \ldots, [z_{n-d}]_{(\boldsymbol{y})}$ af grad i.

For en polynomiumsring $k[X_1, \dots, X_m]$, kan man identificere et monomium af grad $i \geq 0$ med en udvælgelse af $m-1$ elementer i en række af $m-1+i$ elementer, idet koefficienterne identificeres med længden af mellemrummene imellem de valgte elementer. Da denne identifikation er bijektiv, følger umiddelbart, at antallet af monomier af grad i er netop $\binom{m-1+i}{m-1} = \binom{m+i-1}{i}$.

Herved konkluderes, at for $i > 0$, er

$$h_i(\Delta) = \dim_k R_i \leq |\{f \in k[Z_1, \dots, Z_{n-d}] \mid f \in \mathscr{M}, \deg f = i\}| = \binom{n-d+i-1}{i}.$$

□

6.2. **h-vektoren for Eulerkomplekser.** I dette kapitel vises, at for Eulerkomplekser vil h-vektoren opfylde Dehn-Sommervilles ligninger. Først defineres den reducerede Eulerkarakterisk for et simplicialt kompleks.

Definition 6.2.1. *For et simplicialt kompleks Δ af dimension $d-1$ med f-vektor $f(\Delta) = (f_{-1}(\Delta), f_0(\Delta), \dots, f_{d-1}(\Delta))$ er den reducerede Eulerkarakteristik af Δ:*

$$\widetilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i=-1}^{d-1} (-1)^i f_i(\Delta).$$

Definition 6.2.2. *Et simplicialt kompleks Δ er et Eulerkompleks, hvis Δ er rent og der for alle $F \in \Delta$ gælder, at $\widetilde{\chi}(\mathrm{lk}_\Delta F) = (-1)^{\dim \mathrm{lk}_\Delta F}$.*

Et vigtigt modeksempel er:

Eksempel 6.2.3. *Lad $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ og $\Delta = \mathcal{P}(V)$. Da er $\dim \Delta = n-1$ og der gælder, at $f_i(\Delta) = \binom{n}{i+1}$ for $-1 \leq i \leq n-1$. Herved haves, at*

$$\widetilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i=-1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i+1} = 0.$$

Da et Eulerkompleks har reduceret Eulerkarakteristik 1 eller -1, sluttes, at Δ ikke er et Eulerkompleks.

Da h-vektoren stammer fra Hilbertserien, vil denne nu blive undersøgt nærmere. Det viser sig nemlig, at Hilbertserien afhænger af den reducerede Eulerkarakterisk for delkomplekser. Først haves dog et hjælpelemma.

Lemma 6.2.4. *For alle endelige mængder F gælder:*

$$\sum_{G \subseteq F} \prod_{v \in G} t_v = \prod_{v \in F} (1 + t_v).$$

Bevis. Lemmaet følger let ved induktion efter F. □

Lemma 6.2.5. *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V og k et legeme. Da gælder om Hilbertserien for $k[\Delta]$ med hensyn til $\mathbb{Z}^n$-gradueringen, at*

$$\mathcal{H}_{k[\Delta]}(\boldsymbol{t}^{-1}) = \sum_{F \in \Delta} (-1)^{\dim F} \widetilde{\chi}(\mathrm{lk}_\Delta F) \prod_{v_i \in F} \frac{t_i}{1 - t_i}.$$

Bevis. Under substitutionen $t_i \mapsto t_i^{-1}$, vil $\frac{t_i}{1-t_i}$ erstattes med:

$$\frac{t_i^{-1}}{1 - t_i^{-1}} = -\left(1 + \frac{t_i}{1 - t_i}\right).$$

Benyttes denne substitution på Hilbertserien for $k[\Delta]$ med hensyn til $\mathbb{Z}^n$ følger nu af Sætning 1.4.4 og Lemma 6.2.4, at

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{k[\Delta]}(\boldsymbol{t}^{-1}) &= \sum_{F\in\Delta}\prod_{v_i\in F}\frac{t_i^{-1}}{1-t_i^{-1}} = \sum_{F\in\Delta}\prod_{v_i\in F} -\left(1+\frac{t_i}{1-t_i}\right)\\
&= \sum_{F\in\Delta}(-1)^{|F|}\prod_{v_i\in F}\left(1+\frac{t_i}{1-t_i}\right) = \sum_{F\in\Delta}(-1)^{|F|}\sum_{G\subseteq F}\prod_{v_i\in G}\frac{t_i}{1-t_i}\\
&= \sum_{G\in\Delta}\left(\sum_{\substack{F\in\Delta\\ G\subseteq F}}(-1)^{|F|}\right)\prod_{v_i\in G}\frac{t_i}{1-t_i}.
\end{aligned}$$

Lad $G\in\Delta$. Da vil afbildningen φ fra $\mathrm{lk}_\Delta G$ til $\{F\in\Delta \mid G\subseteq F\}$ givet ved $\varphi(F') = F'\cup G$ være bijektiv. For et $F\in\Delta$ med $G\subseteq F$ findes således et entydigt bestemt $F'\in\mathrm{lk}_\Delta G$, så $F = F'\cup G$, og der gælder, at $|F| = |F'\cup G| = |F'|+|G|$. Herved er

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{F\in\Delta\\ G\subseteq F}}(-1)^{|F|} &= \sum_{F'\in\mathrm{lk}_\Delta G}(-1)^{|F'|+|G|} = (-1)^{\dim G}\sum_{F'\in\mathrm{lk}_\Delta G}(-1)^{|F'|+1}\\
&= (-1)^{\dim G}\sum_{F'\in\mathrm{lk}_\Delta G}(-1)^{\dim F'} = (-1)^{\dim G}\tilde{\chi}(\mathrm{lk}_\Delta G).
\end{aligned}$$

På baggrund af ovenstående følger resultatet nu direkte. □

Sætning 6.2.6 (Dehn-Sommervilles ligninger for Eulerkomplekser)**.** *Lad Δ være et Eulerkompleks af dimension $d-1$. Da vil h-vektoren for Δ opfylde, at $h_i(\Delta) = h_{d-i}(\Delta)$ for $i = 0,\dots,d$.*

Bevis. Da Δ er et Eulerkompleks og således rent, følger af Lemma 4.2.2, at for $F\in\Delta$, vil

$$\tilde{\chi}(\mathrm{lk}_\Delta F) = (-1)^{\dim \mathrm{lk}_\Delta F} = (-1)^{d-\dim F-2} = (-1)^{d-\dim F}.$$

Hilbertserien for $k[\Delta]$ med hensyn til $\mathbb{Z}^n$-gradueringen opfylder således jævnfør Lemma 6.2.5, at

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{k[\Delta]}(\boldsymbol{t}^{-1}) &= \sum_{F\in\Delta}(-1)^{\dim F}\tilde{\chi}(\mathrm{lk}_\Delta F)\prod_{v_i\in F}\frac{t_i}{1-t_i}\\
&= (-1)^d\sum_{F\in\Delta}\prod_{v_i\in F}\frac{t_i}{1-t_i} = (-1)^d\mathcal{H}_{k[\Delta]}(\boldsymbol{t}).
\end{aligned}$$

I henhold til Sætning 1.4.5, fremkommer Hilbertserien for $k[\Delta]$ med hensyn til $\mathbb{Z}$-gradueringen ved at sætte $t_i = t$ for $1\le i\le n$. Af ovenstående konkluderes således, at $\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t) = (-1)^d\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t^{-1})$. Da

$$\mathcal{H}_{k[\Delta]}(t) = \frac{\sum_{i=0}^d h_i(\Delta)t^i}{(1-t)^d}$$

giver ovenstående ligning, at

$$\sum_{i=0}^d h_i(\Delta)t^i(1-t^{-1})^d = \sum_{i=0}^d h_i(\Delta)t^{-i}(t-1)^d.$$

Ved at benytte binomialformlen giver for $i = 0,\dots,d$ koefficienten til t^{-d+i} i begge sider af ovenstående lighed anled til følgende:

$$\sum_{j=0}^i h_j(\Delta)(-1)^{d-(i-j)}\binom{d}{d-(i-j)} = \sum_{j=0}^i h_{d-j}(\Delta)(-1)^{d-(i-j)}\binom{d}{i-j}.$$

Af dette udtryk følger sætningen let. □

6.3. **Den øvre grænse sætning.** For et simplicialt kompleks, der både er et Euler- og Cohen-Macaulaykompleks, gælder således for h-vektoren Dehn-Sommervilles ligninger samt en ulighed, der minder om Korollar 5.2.10. Disse vil være de centrale dele af følgende bevis:

Bevis for den øvre grænse sætning for komplekser Sætning 6.0.12. Da Δ er et Eulerkompleks, er Eulerkarateristikken af Δ forskellig fra nul. Det følger nu af Eksempel 6.2.3, at der må gælde, at $f_0(\Delta) > d$. Idet $n \geq f_0(\Delta) \geq d+1$, vil således $C(n,d)$ være veldefineret.

For $d-1=0$ følger det af definitionen af Eulerkompleks, at

$$1 = (-1)^{\dim \Delta} = (-1)^{\dim \mathrm{lk}_\Delta \emptyset} = \widetilde{\chi}(\mathrm{lk}_\Delta \emptyset) = \widetilde{\chi}(\Delta) = -f_{-1}(\Delta) + f_0(\Delta) = -1 + f_0(\Delta)$$

hvorfor $f_0(\Delta) = 2$. Af Lemma 5.2.8 følger, at $f(C(n,1)) = (1,2)$. Herved konkluderes, at $f(\Delta) = f(C(n,1))$ og sætningen er opfyldt. Antag derfor, at $d-1 > 0$.

Da Δ er et Cohen-Macaulaykompleks, følger det af Sætning 6.1.1, at for $0 \leq i \leq d$ vil der gælde, at

$$h_i(\Delta) \leq \binom{n-d+i-1}{i}.$$

Da $d > 1$, vil for et $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ kunne sluttes på baggrund af Korollar 5.2.10, at $h_i(\Delta) \leq h_i(C(n,d))$. Idet Δ er et Eulerkompleks, følger det af Sætning 6.2.6, at h-vektoren opfylder Dehn-Sommervilles ligning $h_i(\Delta) = h_{d-i}(\Delta)$ for et $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$. Da $C(n,d)$ i henhold til Sætning 5.2.7 er en simplicial d-polytop, vil h-vektoren for $C(n,d)$ opfylde samme ligning jævnfør Sætning 5.1.5. Herved sluttes, at for $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$, vil

$$h_{d-i}(\Delta) = h_i(\Delta) \leq h_i(C(n,d)) = h_{d-i}(C(n,d)).$$

Der er således blevet vist, at for alle $0 \leq i \leq d$, vil $h_i(\Delta) \leq h_i(C(n,d))$. Af Lemma 1.5.4 følger, at f-vektoren kan beskrives ved hjælp af h-vektoren. Som tidligere bemærket gælder denne relation for både simpliciale komplekser og polytoper. Da de indgående binominalkoefficienter er ikke-negative, sluttes, at for et $0 \leq i \leq d$ vil

$$f_{i-1}(\Delta) = \sum_{k=0}^{i} \binom{d-k}{i-k} h_k(\Delta) \leq \sum_{k=0}^{i} \binom{d-k}{i-k} h_k(C(n,d)) = f_{i-1}(C(n,d)). \qquad \square$$

7. Geometrisk realisation og den øvre grænse sætning

Der inddrages nu elementer fra topologi, idet der til et simplicialt kompleks associeres et topologisk rum. Efterfølgende vises, at om komplekset er et Cohen-Macaulay- og Eulerkompleks kan bestemmes ved at benytte algebraisk topologi. Ved at benytte resultater om de toplogiske sfærer og hovedresultatet fra foregående kapitel vil hovedsætningen blive vist:

Sætning 7.0.1 (Den øvre grænse sætning for simpiciale sfærer)**.** *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V, hvor $|V| = n$. Antag $|\Delta| \cong S^{d-1}$, hvor $d-1 \geq 0$. Da vil $f_i(\Delta) \leq f_i(C(n,d))$ for $i = -1, \ldots, d-1$.*

7.1. **Geometrisk realisation af et simplicialt kompleks.** Til et simplicialt kompleks kan tilknyttes et topologisk rum kaldet den geometriske realisation. I dette afsnit er målet af vise en sammenhæng mellem relative singulære homologi af den geometriske realisation og reduceret simplicial homologi af delkomplekser.

Bemærk, at for en konveks mængde $C \subseteq \mathbb{R}^m$ er det relativ indre, betegnet $\operatorname{relint} C$, det indre af C betragtet som delmængde af det affine hylster af C.

Definition 7.1.1. *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V og $m \in \mathbb{N}$. Lad $\rho\colon V \to \mathbb{R}^m$ være en funktion, der opfylder, at*

(a) *ρ er injektiv*
(b) *Elementerne i $\rho(F)$ er affint uafhængige for alle $F \in \Delta$*

(c) $\mathrm{relint}(\mathrm{conv}(\rho(F))) \cap \mathrm{relint}(\mathrm{conv}(\rho(G))) = \emptyset$ *for alle* $F, G \in \Delta$, *hvor* $F \neq G$.

Udstyret med underrumstopologien, er $\bigcup_{F\in\Delta} \mathrm{relint}(\mathrm{conv}(\rho(F))) \subseteq \mathbb{R}^m$ *et topologisk rum og dette kaldes en* geometrisk realisation *af* Δ.

Geometriske realisationer eksisterer for ethvert simplicialt kompleks. Lad nemlig $m \geq |V| = n$. Da kan der vælges $x_1, \ldots, x_n$ affinsk uafhængige elementer i $\mathbb{R}^m$, og afbildningen $\rho : V \to \mathbb{R}^m$ givet ved $\rho(v_i) = x_i$ for $i = 1, \ldots, n$ er en geometrisk realisation af Δ. Det følger desuden af ovenstående definition, at to geometriske realisationer af samme kompleks er homeomorfiske. Yderligere detajler forefindes i [5, Kapitel 3]. Da geometriske realisationer eksistere og er entydige op til homeomorfi, kan man for et simplicialt kompleks Δ definere $|\Delta|$ som det topologiske rum, der er en geometrisk realisation af Δ. For et topologisk rum X er et simplicialt kompleks Δ en triangulering af X, hvis $|\Delta|$ er homeomorf med X.

En af hovedsætningerne om geometrisk realisation af et simplicialt kompleks er følgende:

Sætning 7.1.2 (Ækvivalens af simplicial og singulær reduceret homologi)**.** *Lad* Δ *være et simplicialt kompleks og* k *et legeme. Da vil for alle* $i \in \mathbb{Z}$

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(|\Delta|; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta; k).$$

Et bevis findes i [5, kapitel 51].

Lemma 7.1.3. *Lad* Δ *være et simplicialt kompleks på* V *og* $\rho\colon V \to \mathbb{R}^m$ *være en afbildning, så* $X = \bigcup_{F\in\Delta} \mathrm{relint}(\mathrm{conv}(\rho(F)))$ *er en geometrisk realisation af* Δ. *For* $F \in \Delta$ *sæt* $X_F = \mathrm{conv}(\rho(F))$ *og giv denne delmængde af* $\mathbb{R}^m$ *underrumstopologien.*

For $A \subseteq X$ *gælder da, at* A *er afsluttet(åben) hvis og kun hvis* $A \cap X_F$ *er afsluttet(åben) i* X_F *for alle* $F \in \Delta$.

Bevis. Bemærk, at $X = \bigcup_{F\in\Delta} X_F$, så for $F \in \Delta$, vil $X_F \subseteq X$.

Antag, at A er afsluttet i X. Da er $A = B \cap X$, hvor B er en afsluttet mængde i $\mathbb{R}^m$. Lad $F \in \Delta$. Idet $X_F \subseteq X$, sluttes at $A \cap X_F = B \cap X_F$, som er afsluttet i X_F.

Bemærk, at for $F \in \Delta$ er X_F afsluttet i $\mathbb{R}^m$. Hvis $A \cap X_F$ er afsluttet i X_F, er det således også en afsluttet mængde i $\mathbb{R}^m$. Da $A = A \cap X = \bigcup_{F\in\Delta} A \cap X_F$ er A foreningen af endeligt mange afsluttede mængder i $\mathbb{R}^m$ og således er A afsluttet i $\mathbb{R}^m$. Herved følger, at $A = A \cap X$ er afsluttet i X.

Mængden A er åben i X netop hvis $X \setminus A$ afsluttet i X. I henhold til ovenstående er dette ækvivalent med, at $(X \setminus A) \cap X_F = X_F \setminus (X_F \cap A)$ er afsluttet i X_F for alle $F \in \Delta$, hvilket forekommer netop hvis $A \cap X_F$ er åben i X_F for alle $F \in \Delta$. $\square$

Lemma 7.1.4. *Lad* Δ *være et simplicialt kompleks på mængden* V *og* k *et legeme. Antag at* X *er en geometrisk realisation af* Δ *givet ved* $\rho\colon V \to \mathbb{R}^m$. *Lad* $F \in \Delta$ *og sæt* $X_F = \mathrm{conv}(\rho(F))$. *For* $p \in \mathrm{relint}(X_F)$ *vil for alle* $i \in \mathbb{Z}$ *gælde, at*

$$\mathrm{H}_i(X, X \setminus \{p\}; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-\dim F-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k).$$

Bevis. Lad $p \in \mathrm{relint}(X_F)$ for et $F \in \Delta$. Bemærk, at der må gælde, at $F \neq \emptyset$, hvis sådanne et p eksistere. Da sættes

$$B = \bigcup_{G\in \mathrm{lk}_\Delta F} \mathrm{relint}(X_{F\cup G}).$$

Der vil blive vist, at B er åben som delmængde af X. Lad $H \in \Delta$. Da haves, at $X_H = \bigcup_{G\subseteq H} \mathrm{relint}(X_G)$. Hvis $F \nsubseteq H$, vil $X_H \cap B = \emptyset$ jævnfør definitionen af geometrisk realisation. Herved er $X_H \cap B$ åben i X_H. Hvis $F \subseteq H$, vil der gælde, at

$$X_H \cap B = \bigcup_{F\subseteq G\subseteq H} \mathrm{relint}(X_G) = X_H \setminus \bigcup_{G\subseteq H, F\nsubseteq G} X_G.$$

Herved er $B \cap X_H$ komplementet til en afsluttet mængde i X_H, hvorved det følger, at $B \cap X_H$ er åben i X_H. Som bemærket i Lemma 7.1.3 medfører dette, at B er åben i X.

Lad $U = X \setminus \mathrm{cl}(B)$ og $A = X \setminus \{p\}$. Da $\emptyset \in \mathrm{lk}_\Delta F$, vil $\mathrm{relint}(X_F) \subseteq B$, hvorfor $p \in B$. Der haves $B \subseteq \mathrm{cl}(B)$, hvorfor $B \cap U = \emptyset$. Da $p \in B$ og B er åben i X sluttes derved, at $p \notin \mathrm{cl}(U)$. Herved konkluderes, at $\mathrm{cl}(U) \subseteq X \setminus \{p\} = A$. Da X er et underrum af $\mathbb{R}^m$, er X Hausdorff. På baggrund af dette sluttes, at A er åben. Herved haves, at $\mathrm{cl}(U) \subseteq A = \mathrm{int}(A)$. I henhold til Excision Sætningen for singulær homologi [5, Theorem 31.7] følger, at for $i \in \mathbb{Z}$ er

$$\mathrm{H}_i(X, X \setminus \{p\}; k) = \mathrm{H}_i(X, A; k) \cong \mathrm{H}_i(X \setminus U, A \setminus U; k) = \mathrm{H}_i(\mathrm{cl}(B), \mathrm{cl}(B) \setminus \{p\}; k).$$

Definer nu følgende simpliciale komplekser

$$\Delta_F = \langle F \rangle * \mathrm{lk}_\Delta F, \quad \Delta'_F = \langle F \rangle \setminus \{F\} * \mathrm{lk}_\Delta F.$$

Bemærk, at disse begge er delkomplekser af Δ. For et delkompleks Γ af Δ lad $|\Gamma|$ være den geometriske realisation af Γ, der fremkommer ved at benytte ρ. Da gælder, at $\mathrm{cl}(B) = |\Delta_F|$, og $|\Delta'_F|$ er en defomations retrakt af $\mathrm{cl}(B) \setminus \{p\}$. Herved følger, at $\mathrm{H}_i(\mathrm{cl}(B) \setminus \{p\}, |\Delta'_F|; k) = 0$ for alle $i \in \mathbb{Z}$. Da $|\Delta'_F| \subseteq \mathrm{cl}(B) \setminus \{p\} \subseteq |\Delta_F|$ giver den lange eksakte følge fra relativ singulær homologi

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathrm{H}_i(\mathrm{cl}(B) \setminus \{p\}, |\Delta'_F|; k) \longrightarrow \mathrm{H}_i(|\Delta_F|, |\Delta'_F|; k) \longrightarrow \mathrm{H}_i(|\Delta_F|, \mathrm{cl}(B) \setminus \{p\}; k) \\ \longrightarrow \mathrm{H}_{i-1}(\mathrm{cl}(B) \setminus \{p\}, |\Delta'|; k) \longrightarrow \cdots, \end{aligned}$$

at

$$\mathrm{H}_i(\mathrm{cl}(B), \mathrm{cl}(B) \setminus \{p\}; k) = \mathrm{H}_i(|\Delta_F|, \mathrm{cl}(B) \setminus \{p\}; k) \cong \mathrm{H}_i(|\Delta_F|, |\Delta'_F|; k)$$

for alle $i \in \mathbb{Z}$. Da Δ'_F er et delkompleks af Δ_F følger af ækvivalensen af simplicial og singulær relativ homologi, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ er

$$\mathrm{H}_i(|\Delta_F|, |\Delta'_F|; k) \cong \mathrm{H}_i(\Delta_F, \Delta'_F; k).$$

Om relativ simplicial homologi gælder der, at $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Gamma, \Gamma'; k) = \mathrm{H}_i(\Gamma, \Gamma'; k)$, hvis det simpliciale kompleks $\Gamma' \neq \emptyset$. Da $F \neq \emptyset$, vil $\langle F \rangle \setminus \{F\} \neq \emptyset$. Idet $F \in \Delta$ haves ligeledes, at $\mathrm{lk}_\Delta F \neq \emptyset$. Herved sluttes, at $\Delta'_F \neq \emptyset$. På baggrund af dette konkluderes, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ er

$$\mathrm{H}_i(\Delta_F, \Delta'_F; k) = \widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta_F, \Delta'_F; k).$$

Da Δ_F er foreningen af $\langle F \rangle$ og et simpicialt kompleks, hvor $F \neq \emptyset$, følger det af Korollar C.3.2, at $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta_F; k) = 0$ for alle $i \in \mathbb{Z}$. Fra den lange eksakte følge i relativ reduceret homologi

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta_F; k) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta_F, \Delta'_F; k) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\Delta'_F; k) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\Delta_F; k) \longrightarrow \cdots,$$

konkluderes således, at $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta_F, \Delta'_F; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\Delta'_F; k)$ for alle $i \in \mathbb{Z}$. Da $F \neq \emptyset$ sluttes på baggrund af Lemma C.3.3, at for $i \in \mathbb{Z}$, vil $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta'_F; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-\dim F}(\mathrm{lk}_\Delta F; k)$.

Sammenholdes ovenstående resultater fremkommer, at for $i \in \mathbb{Z}$, er

$$\mathrm{H}_i(X, X \setminus \{p\}; k) \cong \mathrm{H}_i(\Delta_F, \Delta'_F; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\Delta'_F; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1-\dim F}(\mathrm{lk}_\Delta F; k). \quad \square$$

7.2. **Geometrisk realisation og Cohen-Macaulay- og Eulerkomplekser.** Om et simplicialt kompleks er et Cohen-Macaulay- og Eulerkompleks kan bestemmes blot ved at betragte singulær homologi af dets geometriske realisation. Dette er beskrevet i følgende sætning.

Sætning 7.2.1. *Lad Δ være et simplicialt kompleks med $\dim \Delta = d - 1 \geq 0$, X en geometrisk realisation af Δ og k et legeme. Da er følgende betingelser ækvivalente:*

(a) *Δ er Cohen-Macaulay over k*
(b) *For alle $p \in X$ og alle $i < d - 1$, vil*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(X; k) = \mathrm{H}_i(X, X \setminus \{p\}; k) = 0.$$

Yderligere gælder der, at hvis de ækvivalente betingelser er opfyldt, vil Δ *være et Eulerkompleks hvis og kun hvis der for alle* $p \in X$ *gælder, at*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{d-1}(X;k) \cong \mathrm{H}_{d-1}(X, X \setminus \{p\}; k) \cong k.$$

Bevis. Antag Δ er et simplicalt kompleks på V og den geometriske realisation X er givet ved afbildningen $\rho : V \to \mathbb{R}^m$, hvor $m \in \mathbb{N}$. For $F \in \Delta$ sættes $X_F = \mathrm{conv}(\rho(F))$.

For $F \in \Delta$, hvor $F \neq \emptyset$, vil $\mathrm{relint}(X_F) \neq \emptyset$. Herved findes således et $p \in \mathrm{relint}(X_F)$. Idet

$$X = \bigcup_{F \in \Delta} \mathrm{relint}(X_F),$$

vil der for $p \in X$ altid findes et $F \in \Delta$, så $p \in \mathrm{relint}(X_F)$. Bemærk, at der må gælde, at $F \neq \emptyset$. For et sådant par, følger af Lemma 7.1.4, at for $i \in \mathbb{Z}$, vil

$$\mathrm{H}_i(X, X \setminus \{p\}; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-\dim F-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) = \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|F|}(\mathrm{lk}_\Delta F; k). \tag{6}$$

Der haves, at $\emptyset \in \Delta$ og opfylder $\mathrm{lk}_\Delta \emptyset = \Delta$. Ækvivalensen af singulær og simplicial homologi Sætning 7.1.2 medfører således, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ er

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(X;k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta;k) = \widetilde{\mathrm{H}}_{i-|\emptyset|}(\mathrm{lk}_\Delta \emptyset; k). \tag{7}$$

Herved konkluderes, at betingelse (b) er ækvivalent med, at for alle $F \in \Delta$ og $i < d$ er $\widetilde{\mathrm{H}}_{i-|F|-1}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) = 0$. Af Reisners kriterium (Sætning 4.0.4) følger nu, at de to betingelserne er ækvivalente.

Antag nu, at de ækvivalente betingelser er opfyldt. Med argumenter analoge til [4, 2.44] følger, at for et $F \in \Delta$ vil

$$\widetilde{\chi}(\mathrm{lk}_\Delta F) = \sum_{i=-1}^{\dim \mathrm{lk}_\Delta F} (-1)^i \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_i(\mathrm{lk}_\Delta F; k).$$

Af Reisners kriterium følger nu, at

$$\widetilde{\chi}(\mathrm{lk}_\Delta F) = (-1)^{\dim \mathrm{lk}_\Delta F} \dim_k \widetilde{\mathrm{H}}_{\dim \mathrm{lk}_\Delta F}(\mathrm{lk}_\Delta F; k). \tag{8}$$

Antag nu, at Δ er et Eulerkompleks og lad $F \in \Delta$. Af ovenstående følger, at $\widetilde{\mathrm{H}}_{\dim \mathrm{lk}_\Delta F}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) \cong k$. Da Δ er rent, vil $\dim \mathrm{lk}_\Delta F = d - 2 - \dim F$ i henhold til Lemma 4.2.2. Der konkluderes således, at for alle $F \in \Delta$, vil

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{d-2-\dim F}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) \cong k.$$

For $\emptyset \in \Delta$, giver (7) i dette filfælde, at $\widetilde{\mathrm{H}}_{d-1}(X;k) \cong k$. Lad $p \in X$. Som tidligere findes $F \in \Delta$, så $F \neq \emptyset$ og $p \in \mathrm{relint}(X_F)$. På baggrund af (6) konkluderes, at $\mathrm{H}_{d-1}(X, X \setminus \{p\}; k) \cong k$.

Antag nu, at den ekstra betingelse er opfyldt. For $\emptyset \in \Delta$ er $\mathrm{lk}_\Delta \emptyset = \Delta$ og således vil $\dim \mathrm{lk}_\Delta \emptyset = d - 1$. Af (7) følger nu, at $\widetilde{\mathrm{H}}_{\dim \mathrm{lk}_\Delta \emptyset}(\mathrm{lk}_\Delta \emptyset; k) \cong k$. For $F \in \Delta$, hvor $F \neq \emptyset$, kan der som nævnt vælges $p \in \mathrm{relint}(X_F)$. Da Δ er et Cohen-Macaulaykompleks, er Δ er rent i henhold til Korollar 4.3.3. Af Lemma 4.2.2 sluttes herved, at $\dim \mathrm{lk}_\Delta F = d - 2 - \dim F$. Af (6) følger nu, at $\widetilde{\mathrm{H}}_{\dim \mathrm{lk}_\Delta F}(\mathrm{lk}_\Delta F; k) \cong k$. For alle $F \in \Delta$ konkluderes på baggrund af (8), at $\widetilde{\chi}(\mathrm{lk}_\Delta F) = (-1)^{\dim \mathrm{lk}_\Delta F}$. Da der allerede er blevet bemærket, at Δ er rent, vil Δ være et Eulerkompleks. □

7.3. **Den øvre grænse sætning for simpliciale sfærer.** Efter et resultat om singulær homologi af topologiske sfærer, vil hovedsætningen i projektet blive vist.

Lemma 7.3.1. *Lad* k *være et legeme og* $n \in \mathbb{N}_0$. *Da vil for* $p \in S^n$ *gælde:*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(S^n; k) \cong \mathrm{H}_i(S^n, S^n \setminus \{p\}; k) \cong \begin{cases} k & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

Bevis. Der gælder for et $n \in \mathbb{N}_0$, at for $p \in S^n$ vil $S^n \setminus \{p\} \neq \emptyset$. Herved sluttes, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ vil

$$\mathrm{H}_i(S^n, S^n \setminus \{p\}; k) = \widetilde{\mathrm{H}}_i(S^n, S^n \setminus \{p\}; k).$$

Tilsvarende vil $S^n \setminus \{p\}$ være kontraktibel, hvorfor $\widetilde{\mathrm{H}}_i(S^n \setminus \{p\}; k) = 0$ for alle $i \in \mathbb{Z}$. Af den lange følge i relativ reduceret homologi,

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_i(S^n \setminus \{p\}; k) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_i(S^n; k) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_i(S^n, S^n \setminus \{p\}; k) \\ \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(S^n \setminus \{p\}; k) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

følger nu, at

$$\mathrm{H}_i(S^n, S^n \setminus \{p\}; k) = \widetilde{\mathrm{H}}_i(S^n, S^n \setminus \{p\}; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_i(S^n; k)$$

for alle $i \in \mathbb{Z}$. Den sidste isomorfi følger af, at dette netop er reduceret singulær homologi af en n-sfære i henhold til [5, Theorem 31.8]. □

Korollar 7.3.2. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og k et legeme. Hvis $|\Delta| \cong S^n$ for et $n \in \mathbb{N}_0$, vil Δ være et Cohen-Macaulaykompleks over k og et Eulerkompleks.*

Bevis. Bemærk, at hvis $|\Delta| \cong S^n$ må $\dim \Delta = n$. Korollaret følger da direkte ved at sammmenholde Lemma 7.3.1 og Sætning 7.2.1, idet singulær homologi er en topologisk invariant. □

Bevis for den øvre grænse sætning for simpliciale sfære. Af Korollar 7.3.2 følger, at Δ er både et Euler- og Cohen-Macaulaykompleks. Resultatet følger nu umiddelbart af Sætning 6.0.12. □

Korollar 7.3.3. *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V. Antag $|\Delta| \cong S^{d-1}$, hvor $d-1 \geq 0$. Da vil $f_i(\Delta) \leq f_i(C(f_0(\Delta), d))$ for $i = -1, \ldots, d-1$.*

Bevis. Ved at se bort fra de elementer i V, som ikke indgår i Δ, kan Δ betragtes som et simplicialt kompleks på $V' = \bigcup_{F \in \Delta} F$. Da der klart haves, at $|V'| = f_0(\Delta)$, følger resultatet af den øvre grænse sætning for simpliciale sfærer. □

Eksempel 7.3.4. *Ved at benytte de fundne resultater kan man beregne af h-vektoren for cykliske polytoper og efterfølgende den tilsvarende f-vektoren. Ovenstående korollar bliver således til, at for et simplicialt kompleks Δ med $|\Delta| \cong S^1$, vil $f_1(\Delta) \leq f_0(\Delta)$ og for et simplicialt kompleks Γ med $|\Gamma| \cong S^2$ vil $f_1(\Gamma) \leq 3(f_0(\Gamma) - 2)$ og $f_2(\Gamma) \leq 2(f_0(\Gamma) - 2)$.*

Bilag A. Ringteori

I følgende afsnit defineres en række ringteoretiske begreber, som vil være centrale i projektet.

A.1. Graduerede ringe og moduler.

Definition A.1.1. *Lad k være et legeme og R en kommutativ k-algebra. Lad $n \in \mathbb{N}$. Hvis der for alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ findes et k-vektorrum R_α, som opfylder, at $R = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} R_\alpha$ som k-vektorrum og $R_\alpha R_\beta \subseteq R_{\alpha+\beta}$ for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, kaldes R en $\mathbb{Z}^n$-*gradueret ring.

En R-modul M kaldes en $\mathbb{Z}^n$-gradueret R-modul, hvis der for alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ findes et k-vektorrum M_α, så $M = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} M_\alpha$ som k-vektorrum og $R_\alpha M_\beta \subseteq M_{\alpha+\beta}$ for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$. Elementerne i M_α for et $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ betegnes de homogene elementer i M af grad α.

Betragt nu tilfældet, hvor R er en endelig frembragt kommutativ k-algebra og M en endeligt frembragt R-modul. Hvis R er $\mathbb{Z}^n$-gradueret ring og M en $\mathbb{Z}^n$-gradueret R-modul i henhold til ovenstående definition, vil der gælde, at $\dim_k M_\alpha < \infty$ for alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Funktionen $\mathcal{H}(M, -)\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ givet ved $\mathcal{H}(M, \alpha) = \dim_k M_\alpha$ for $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ kaldes Hilbertfunktionen. Lad $\boldsymbol{t} = t_1, \dots, t_n$, og for $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ benyttes notationen $\boldsymbol{t}^\alpha = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$. Hilbertserien for M er da

$$\mathcal{H}_M(\boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{H}(M, \alpha) \boldsymbol{t}^\alpha.$$

Eksempel A.1.2. *Lad k være et legeme og $R = k[X_1, \dots, X_n]$ for et $n \in \mathbb{N}$. Da er som vektorrum over k*

$$R = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} kX^\alpha,$$

Ved at sætte $R_\alpha = kX^\alpha$ for $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ og $R_\alpha = 0$ ellers, fremkommer en $\mathbb{Z}^n$-graduering af R. Hilbertserien er i dette tilfælde:

$$\mathcal{H}_R(\boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \boldsymbol{t}^\alpha.$$

Hvis man for $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ definerer $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$, vil for $i \in \mathbb{Z}$

$$R_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n, |\alpha| = i} R_\alpha$$

være mængden af homogene polynomier i R af grad i. Da produktet af homogene polynomier er homogent, følger, at dette definerer en $\mathbb{Z}$-graduering af R. For $i \geq 0$ vil mængde af monomier af grad i være en k-basis for R_i. Der findes netop $\binom{n+i-1}{i}$ af disse, så Hilbertserien er

$$\mathcal{H}_R(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \binom{n+i-1}{i} t^i.$$

A.2. *lokale ringe.

Lad i dette afsnit k være et legeme og R være en kommutativ k-algebra. Antag, at for et $n \in \mathbb{Z}$ er ringen R udstyret med $\mathbb{Z}^n$-graduering.

Definition A.2.1. *Et ideal I i R kaldes et* gradueret ideal, *hvis det er frembragt som R-modul af de homogene elementer i I. For et vilkårlig ideal I i R, defineres I^* som idealet frembragt af de homogene elementer i I. Der bemærkes, at for et ideal I i R haves, at I er gradueret netop hvis $I = I^*$.*

Definition A.2.2. *Et gradueret ideal $\mathfrak{m}$ i R kaldes* *maksimal, *hvis der for ethvert gradueret ideal $\mathfrak{p}$ i R, som ægte indeholder $\mathfrak{m}$, gælder, at $\mathfrak{p} = R$.*

Ringen R kaldes *lokal, *hvis der der findes netop et *maksimal ideal i R.*

Bemærk, at jævnfør [2, Kapitel 1.5], vil der for en *lokal ring $(R, \mathfrak{m})$ haves, at $\mathfrak{m}$ er et primideal i R.

Eksempel A.2.3. *Lad k være et legeme og $R = k[X_1, \dots, X_n]$ for et $n \in \mathbb{N}$. Lad R være udstyret med $\mathbb{Z}^n$-gradueringen fra Eksempel A.1.2. Da vil $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$ være et gradueret ideal i R. Idet $\mathfrak{m}$ er et maksimalideal, vil det også være *maksimal. Det homogent element i R er et monomium multipliceret med en konstant. Et ægte gradueret ideal i R er således frembragt af monomier af positiv grad, og herved indeholdt i $\mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ indeholder alle ægte graduerede idealer i R, må $\mathfrak{m}$ være et eneste *maksimale ideal i R. Ergo $(R, \mathfrak{m})$ er en *lokal ring.*

A.3. **Regulære følger.**

Definition A.3.1. *Lad M være en modul over en ring R. Et element $x \in R$ kaldes M-regulært, hvis $xm \neq 0$ for alle $m \in M$ forskellig fra nul.*

For $n \in \mathbb{N}$ vil en følge $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ af elementer fra R kaldes en M-regulær følge, hvis x_i er et $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$-regulært element for $i = 1, \dots, n$ og $M/\boldsymbol{x}M \neq 0$. I dette tilfælde er n længden af følgen. Der benyttes konventionen, at den tomme følge er en M-regulær følge af længde 0.

Lemma A.3.2. *Lad R være en Noethersk ring og M en R-modul med $\dim M < \infty$. Lad $x \in R$ være et M-regulært element. Da vil $\dim M/xM \leq \dim M - 1$.*

Bevis. Da $\operatorname{Supp} M/xM \subseteq \operatorname{Supp} M$, haves, at $\dim M/xM \leq \dim M$. Antag, at $\dim M/xM = \dim M$. Da $\dim M/xM$ er endelig, findes en maksimal kæde af primidealer i støtten for M/xM. Dette vil være en kæde af primidealer i støtten M af længde $\dim M$. Da x er et M-regulært element, vil $x \notin \operatorname{Ann}_R(m)$ for alle $m \in M$ forskellige fra nul. Herved følger, at $x \notin \mathfrak{p}$ for alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$. Da de minimale elementer for $\operatorname{Supp} M$ er indeholdt i $\operatorname{Ass} M$, vil $x \notin \mathfrak{p}$ for ethvert minimalt primideal i støtten for M. Der gælder, at $x \in \mathfrak{q}$ for alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Supp} M/xM$. Det første primideal i den betragtede kæde er således ikke minimalt i støtten for M, hvorfor kæden kan udvides til en kæde af primidealer i støtten for M af længde $\dim M + 1$, og en modstrid fremkommer. □

Korollar A.3.3. *Lad R være en Noethersk ring og M en endeligt dimensionel R-modul. Hvis $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ er en regulær M-følge i R, vil $\dim M/\boldsymbol{x}M \leq \dim M - n$.*

Bevis. Beviset føres ved induktion efter n. For $n = 1$ følger påstanden af Lemma A.3.2. For $n > 1$, vil x_n være et regulært element på $M/(x_1, \dots, x_{n-1})M$. Dette R-modul har endelig Krull-dimension, da det gør sig gældende for M. Da

$$(M/(x_1, \dots, x_{n-1})M)/x_n(M/(x_1, \dots, x_{n-1})M) \cong M/(x_1, \dots, x_n)M$$

som R-moduler, følger påstanden ligeledes af Lemma A.3.2. □

A.4. **Cohen-Macaulaymoduler.**

Definition A.4.1. *Lad R være en Noethersk ring, M en endeligt frembragt R-modul og I et ideal i R. Lad $\operatorname{depth}_I M$ være den største længde af M-regulære følger i I, og dette betegnes I-dybden af M. Bemærk, at I-dybden af M er uendelig, hvis der findes M-regulære følger i I af vilkårlig stor længde.*

Hvis R er en lokal ring med maksimalideal $\mathfrak{m}$, kaldes $\mathfrak{m}$-dybden af M blot for dybden af M og denne betegnes $\operatorname{depth} M$.

For en lokal Noethersk ring $(R, \mathfrak{m})$ og en endeligt frembragt R-modul, som ikke er nulmodulen, gælder følgende ulighed $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(M)$. Bevis kan findes i [3, Kapitel 27].

Definition A.4.2. *Lad $(R, \mathfrak{m})$ være en lokal Noethersk ring og $M \neq 0$ en endeligt frembragt R-modul. Da er M en Cohen-Macaulaymodul, hvis $\operatorname{depth} M = \dim M$.*

Ringen R er en Cohen-Macaulayring, hvis R er en Cohen-Macaulaymodul betragt som R-modul, det vil sige, at $\operatorname{depth} R = \dim R$.

Hvis R være en vilkårlig Noethersk ring og $M \neq 0$ en endeligt frembragt R-modul, er M en Cohen-Macaulaymodul, hvis $R_{\mathfrak{m}}$-modulen $M_{\mathfrak{m}}$ er en Cohen-Macaulaymodul for alle maksimalidealer $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M$. Ringen R er en Cohen-Macaulayring, hvis den er en Cohen-Macaulaymodul betragtet som R-modul, altså hvis $R_{\mathfrak{m}}$ er en Cohen-Macaulayring for alle maksimalidealer $\mathfrak{m}$ i R.

A.5. ***lokale ringe og Cohen-Macaulay ringe.** For at bestemme om graduerede ringe er Cohen-Macaulay, viser det sig, at det er tilstrækkeligt at betragte graduerede primidealer. I specialtilfældet af en *lokal ring $(R, \mathfrak{m})$, er det nok at undersøge om ringen $R_{\mathfrak{m}}$ er Cohen-Macaulay.

Lemma A.5.1. *Lad R være en Noethersk $\mathbb{Z}^n$-gradueret ring for et $n \in \mathbb{N}$. For $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ gælder der, at $R_{\mathfrak{p}}$ er en Cohen-Macaulayring hvis og kun hvis $R_{\mathfrak{p}^*}$ er en Cohen-Macaulayring.*

Bemærk, at det af [2, Lemma 1.5.6.] følger, at for et primideal $\mathfrak{p}$, vil $\mathfrak{p}^*$ ligeledes være et primideal, så lokalisering i $\mathfrak{p}^*$ er veldefineret.

Bevis. Hvis $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ er et gradueret ideal, vil $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^*$, så påstanden er indlysende. Antag, at $\mathfrak{p}$ ikke er gradueret. Da vil både $R_{\mathfrak{p}}$ og $R_{\mathfrak{p}^*}$ være lokale ringe. Af [2, Theorem 1.5.8] og [2, Theorem 1.5.9.], følger at

$$\dim R_{\mathfrak{p}} = \dim R_{\mathfrak{p}^*} + 1, \quad \operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} = \operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}^*} + 1.$$

På bagrund af ovenstående ligninger haves, at $\dim R_{\mathfrak{p}} = \operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}}$ netop hvis det samme gør sig gældende for $R_{\mathfrak{p}^*}$. □

Sætning A.5.2. *Antag $(R, \mathfrak{m})$ er en Noethersk *lokal ring. Da er R en Cohen-Macaulayring hvis og kun hvis $R_{\mathfrak{m}}$ er en Cohen-Macaulayring.*

Bevis. Antag R er en Cohen-Macaulayring. Da $\mathfrak{m}$ er et primideal følger det direkte af [2, Theorem 2.1.3.], at $R_{\mathfrak{m}}$ er en Cohen-Macaulayring.

Antag, at $R_{\mathfrak{m}}$ er en Cohen-Macaulay ring. Lad $\widetilde{\mathfrak{m}}$ være et maksimalideal i R. Da vil $\widetilde{\mathfrak{m}}^*$ være et gradueret ideal, og $\widetilde{\mathfrak{m}}^* \subseteq \widetilde{\mathfrak{m}} \subsetneq R$. Herved sluttes, at $\widetilde{\mathfrak{m}}^*$ er et ægte gradueret ideal, hvorfor $\widetilde{\mathfrak{m}}^* \subseteq \mathfrak{m}$. Af [2, Lemma 1.5.6.] følger, at $\widetilde{\mathfrak{m}}^*$ er et primideal. Således vil $\widetilde{\mathfrak{m}}^*_{\mathfrak{m}} \in \operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{m}})$. Af [2, Theorem 2.1.3.] sluttes nu, at $(R_{\mathfrak{m}})_{\widetilde{\mathfrak{m}}^*_{\mathfrak{m}}}$ er en Cohen-Macaulayring. Af lokaliseringsprincippet [11, (4.14)] følger, at $(R_{\mathfrak{m}})_{\widetilde{\mathfrak{m}}^*_{\mathfrak{m}}} \cong R_{\widetilde{\mathfrak{m}}^*}$ som ringe. Herved sluttes, at $R_{\widetilde{\mathfrak{m}}^*}$ er en Cohen-Macaulayring. Af Lemma A.5.1 konkluderes, at $R_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ er en Cohen-Macaulayring. I henhold til definitionen er R således en Cohen-Macaulayring. □

Bilag B. Udvalgte resultater vedrørende lokal kohomologi

I dette afsnit forefindes enkelte beviser vedrørende lokal kohomologi. Bemærk, at $(R, \mathfrak{m})$ er en lokal Noethersk kommutativ ring.

B.1. **Gammafunktoren.** I det følgende er optegnet beviser for de grundlæggende egenskaber med Gammafunktoren, som er centrale for lokal kohomologi. Lad $Mod(R)$ være kategorien af R-moduler med R-homomorfier.

Lemma B.1.1. *Gammafunktoren $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ er en kovariant funktor på $Mod(R)$.*

Bevis. For M en R-modul, følger klart, at $0 \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$. Hvis $x, y \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ findes $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, så $\mathfrak{m}^k x = \mathfrak{m}^\ell y = 0$. Da vil $\mathfrak{m}^{k+\ell}(x+y) = 0$, så $x+y \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$. Hvis $r \in R$, vil $\mathfrak{m}^k(rx) \subseteq \mathfrak{m}^k x = 0$, så $rx \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$. Herved følger, at $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ er en undermodul af M og således en R-modul.

Lad M og N være R-moduler og lad $\varphi \in \hom_R(M,N)$. Hvis $x \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$, vil der findes $k \in \mathbb{N}_0$, med $\mathfrak{m}^k x = 0$, så

$$0 = \varphi(\mathfrak{m}^k x) = \mathfrak{m}^k \varphi(x),$$

så $\varphi(x) \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(N)$. Herved er $\Gamma_{\mathfrak{m}}(\varphi)$ en homomorfi fra $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ til $\Gamma_{\mathfrak{m}}(N)$.

Gammafunktoren er således veldefineret. Da Gammafunktoren på R-homomorfier er restriktion, følger let, at for en R-modul M, er $\Gamma_{\mathfrak{m}}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)}$. Ligeledes haves for $\varphi \in \hom_R(M,N)$ og $\psi \in \hom_R(N,L)$, at

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(\psi \circ \varphi) = \Gamma_{\mathfrak{m}}(\psi) \circ \Gamma_{\mathfrak{m}}(\varphi). \qquad \square$$

Sætning B.1.2. $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ *er en venstre-eksakt additiv funktor.*

Bevis. Da $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ på R homomorfier blot er restriktion, er det oplagt, at $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ er additiv. Betragt en venstre-eksakt R-følge:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3.$$

Anvendes gammafunktoren på denne fremkommer

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_1) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(\alpha)} \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_2) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(\beta)} \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_3).$$

Da α per antagelse er injektiv, er $\Gamma_{\mathfrak{m}}(\alpha)$ ligeledes injektiv, da der blot er tale om restriktion. Da $\beta \circ \alpha = 0$, vil $\Gamma_{\mathfrak{m}}(\beta) \circ \Gamma_{\mathfrak{m}}(\alpha) = \Gamma_{\mathfrak{m}}(0) = 0$, så $\operatorname{im} \Gamma_{\mathfrak{m}}(\alpha) \subseteq \ker \Gamma_{\mathfrak{m}}(\beta)$. Lad $x \in \ker \Gamma_{\mathfrak{m}}(\beta)$. Da er $\Gamma_{\mathfrak{m}}(\beta)(x) = \beta(x) = 0$. Da den oprindelige følge var eksakt, vil der findes $y \in M_1$, så $\alpha(y) = x$. Idet $x \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_2)$, findes et $k \in \mathbb{N}_0$, så $\mathfrak{m}^k x = 0$. Da vil

$$0 = \mathfrak{m}^k x = \mathfrak{m}^k \alpha(y) = \alpha(\mathfrak{m}^k y),$$

og da α er injektiv, følger, at $\mathfrak{m}^k y = 0$. Herved er $y \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_1)$ og $\Gamma_{\mathfrak{m}}(\alpha)(y) = \alpha(y) = x$, så $x \in \operatorname{im} \Gamma_{\mathfrak{m}}(\alpha)$. Således sluttes, at $\ker \Gamma_{\mathfrak{m}}(\beta) \subseteq \operatorname{im} \Gamma_{\mathfrak{m}}(\alpha)$, hvorved det konkluderes, at følgen er eksakt. $\square$

For en følge $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ af elementer i R benyttes konventionen, at for $k \geq 0$, er $\boldsymbol{x}^k = x_1^k, \dots, x_n^k$. Det viser sig, at man kan beregne Gammafunktoren på baggrund af et frembringersæt for maksimalidealet, som beskrevet i:

Lemma B.1.3. *Lad* $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ *være en følge af elementer i* R*, således at idealet* $(\boldsymbol{x}) = \mathfrak{m}$*. Da vil*

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = \{ y \in M \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 \, (\boldsymbol{x}^k) y = 0 \}.$$

Bevis. Der haves $x_1, \dots, x_n \in (\boldsymbol{x}) = \mathfrak{m}$. For et $i \in \mathbb{N}_0$ gælder derved, at $x_j^i \in \mathfrak{m}^i$ for alle $1 \leq j \leq n$, hvorfor $(\boldsymbol{x}^i) \subseteq \mathfrak{m}^i$.

Lad nu $k \geq 0$, og betragt idealet $(\boldsymbol{x}^k)$. Det følger direkte, at $x_j^k \in (\boldsymbol{x}^k)$ for $j \in \{1, \dots, n\}$. Idealet $\mathfrak{m}^{kn}$ er frembragt af $\prod_{j=1}^n x_j^{a_j}$, hvor $a_1, \dots, a_j \in \mathbb{N}_0$ og $\sum_{j=1}^n a_j = kn$. Da følger det, at der findes et $j \in \{1, \dots, n\}$, så $a_j \geq k$. Da vil $x_j^{a_j} \in (\boldsymbol{x}^k)$, hvorfor $\prod_{j=1}^n x_j^{a_j} \in (\boldsymbol{x}^k)$. Herved sluttes, at $\mathfrak{m}^{kn} \subseteq (\boldsymbol{x}^k)$.

Af disse resultater følger lemmaet umiddelbart. $\square$

B.2. **Beregning af lokal kohomologi.** I dette afsnit forefindes et bevis for Sætning 2.2.2.

Bemærkning B.2.1. *Det et eksempel på en klassisk bevisstategi fra homologisk algebra. Da man befinder sig i en kategori, hvor injektive resolutioner eksisterer, er det tilstrækkeligt at vise, at* $\{\mathrm{H}^t((-) \otimes_R C^\bullet)\}_{\{t \geq 0\}}$ *er en universal* δ*-funktor og* $\mathrm{H}^0((-) \otimes_R C^\bullet) \cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$*. For yderligere information henvises til* [12]*. Det følgende bevis kræver dog ikke kendskab til disse begreber.*

Bevis for Sætning 2.2.2. Først vises, at $\mathrm{H}^0(M \otimes_R C^\bullet) \cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ for en R-modul M. For $1 \leq j \leq n$, vil $M_{x_j} \cong M \otimes_R R_{x_j}$, hvorved

$$M \otimes_R C^1 \cong \bigoplus_{j=1}^{n} M_{x_j}.$$

Da $\operatorname{im} d^{-1} = 0$, følger det, at $\mathrm{H}^0(M \otimes_R C^\bullet)$ er isomorf med kernen af afbildningen

$$\sigma\colon M \to \bigoplus_{j=1}^{n} M_{x_j}, \quad \text{hvor } \sigma(m) = \bigoplus_{j=1}^{n} \frac{m}{1}.$$

Der gælder, at $\frac{m}{1} = \frac{0}{1}$ i M_{x_j} for $1 \leq j \leq n$ netop hvis der findes $k \geq 0$, så $x_j^k m = 0$. Herved følger direkte, at

$$\ker \sigma = \{m \in M \mid \exists k \in \mathbb{N}_0, (\boldsymbol{x}^k)m = 0\}.$$

Af Lemma B.1.3 sluttes nu, at $\ker \sigma = \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$, hvorved $\mathrm{H}^0(M \otimes_R C^\bullet) \cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$.

Betragt nu en kort eksakt følge

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

af R-moduler. Der vil blive vist, at $(-) \otimes_R C^\bullet$ inducerer en lang eksakt følge i homologi. Lad $0 \leq t \leq n$. For $J \in \mathscr{D}(t,n)$ vil $R_{\boldsymbol{x}_J}$ være en flad R-modul. Herved sluttes, at C^t er en flad R-modul. Betragt den inducerede følge af kædekomplekser:

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_R C^\bullet \longrightarrow M_2 \otimes_R C^\bullet \longrightarrow M_3 \otimes_R C^\bullet \longrightarrow 0.$$

Da $C^\bullet$ er et kædekompleks bestående af flade R-moduler, vil ovenstående følge af kædekomplekser være eksakt. Da $C^i = 0$ for $i < 0$ er den lange eksakte følge i kohomologi nedenstående

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(M_1 \otimes_R C^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^0(M_2 \otimes_R C^\bullet) &\longrightarrow \mathrm{H}^0(M_3 \otimes_R C^\bullet) \\ &\longrightarrow \mathrm{H}^1(M_1 \otimes_R C^\bullet) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Der vil nu blive vist, at $\mathrm{H}^i(I \otimes_R C^\bullet) = 0$ for alle $i > 0$, hvis I er en injektiv R-modul. Hvis I er nulmodulen, er påstanden klar, så der antages, at $I \neq 0$. Hvis $I = I_1 \oplus I_2$ for to undermoduler af I, der ikke er nul, vil kædekomplekset $I \otimes_R C^\bullet$ være isomorf med $(I_1 \otimes_R C^\bullet) \oplus (I_2 \otimes_R C^\bullet)$ og derved

$$\mathrm{H}^i(I \otimes_R C^\bullet) \cong \mathrm{H}^i(I_1 \otimes_R C^\bullet) \oplus \mathrm{H}^i(I_2 \otimes_R C^\bullet).$$

Da en direkte summand i en injektiv modul er injektiv, vil både I_1 og I_2 være injektive R-moduler. Det er således tilstrækkeligt at vise, at $\mathrm{H}^i(I \otimes_R C^\bullet) = 0$ for alle $i > 0$ for et injektiv R-modul der er indekomposable, dvs. der findes ikke undermoduler I_1, I_2 af I, som begge er forskellige fra nulmodulen og som opfylder $I = I_1 \oplus I_2$.

Der vil nu blive benyttet, at de injektive indekomposable R-moduler kan beskrives ved hjælp af det injektive hylster. Da R er Noethersk haves i henhold til [2, Theorem 3.2.6.] og [2, Lemma 3.2.7.], at for en injektiv R-modul I, vil $I \cong E(R/\mathfrak{p})$, hvor $\{\mathfrak{p}\} = \operatorname{Ass}(I)$ og E betegner det injektive hylster.

Antag først, at $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, hvorved $\operatorname{Ass}(I) = \{\mathfrak{m}\}$. Lemma 3.2.5 følger nu, at der alle $m \in I$ findes $N \geq 0$, så $x_j^N m = 0$ for alle $1 \leq j \leq n$. Som tidligere bemærket, haves for alle $t > 0$

$$I \otimes_R C^t \cong \bigoplus_{J \in \mathscr{D}(t,n)} I_{\boldsymbol{x}_J},$$

hvorfor der sluttes, at $I \otimes C^i = 0$ for alle $i > 0$. Da $\mathrm{H}^i(I \otimes_R C^\bullet)$ er en kvotientmodul af $I \otimes_R C^i$, følger det ønskede.

Antag nu, at $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. Da $(\boldsymbol{x}) = \mathfrak{m}$, findes der således et $1 \leq j \leq n$, så $x_j \notin \mathfrak{p}$. Definer afbildningen $\varphi\colon I \to x_j I$ ved at φ er multiplikation med x_j. Da er φ en surjektiv R-homomorfi. Da $\operatorname{Ass} I = \{\mathfrak{p}\}$, vil der for $m \in I$, hvor $m \neq 0$, gælder at

$\mathrm{Ann}_R(m) \subseteq \mathfrak{p}$. Således sluttes, at for et $m \neq 0$ vil $x_j \notin \mathrm{Ann}_R(m)$, hvilket medfører, at φ er injektiv. Da $x_j I \cong I$, er $x_j I$ en injektiv R-modul. Ergo $x_j I$ er en injektiv undermodul af I og således en direkte summand i I. Idet I er indekomposabel, sluttes, at $x_j I = 0$ eller $x_j I = I$. Da $x_j I \cong I \neq 0$, sluttes herved, at $x_j I = I$. Således vil $\varphi\colon I \to I$ være en isomorfi.

Det vil nu blive defineret en kontrakterende homotopi for kædekomplekset $I \otimes_R C^\bullet$. Lad for $t > 0$

$$\gamma^t\colon I \otimes_R C^t \to I \otimes_R C^{t-1}$$

være afbildningen givet ved, at for $L \in \mathscr{D}(t,n)$ er den på komponenten $I_{\boldsymbol{x}_L}$ er R-homomorfiern

$$\frac{m}{\boldsymbol{x}_L^\ell} \mapsto (-1)^{s-1} \frac{\varphi^{-\ell}(m)}{\boldsymbol{x}_{L\setminus\{j\}}^\ell}$$

hvis $j \in L$ og $j = l_s$, og nulhomomorfien, hvis $j \notin L$. For at vise, at dette er en kontrakterende homotopi skal der vises, at $d^{t-1} \circ \gamma^t + \gamma^{t+1} \circ d^t = \mathrm{id}_{I \otimes_R C^t}$. Lad i det følgende $L \in \mathscr{D}(t,n)$. Betragt $\iota = \frac{m}{\boldsymbol{x}_L^\ell} \in I_{\boldsymbol{x}_L}$. Der skal således vises, at $(d^{t-1} \circ \gamma^t)(\iota) + (\gamma^{t+1} \circ d^t)(\iota) = \iota$.

Antag først, at $j \notin L$. Da er $\gamma^t(\iota) = 0$. Desuden vil

$$d^t(\iota) = \sum_{\substack{K \in \mathscr{D}(t+1,n) \\ \exists s \in \{1,\dots,t+1\}\; K_s = L}} (-1)^{s-1} \frac{m x_{k_s}^\ell}{\boldsymbol{x}_K^\ell} \tag{9}$$

I ovenstående sum vil kun en af mængderne K indeholde j, nemlig $L \cup \{j\}$, og i det tilfælde er $j = k_s$. Herved følger det, at

$$\gamma^{t+1}\left(d^k(\iota)\right) = \gamma^{t+1}\left((-1)^{s-1} \frac{m x_j^\ell}{\boldsymbol{x}_{L\cup\{j\}}^\ell}\right) = (-1)^{s-1}(-1)^{s-1}\left(\frac{\varphi^{-\ell}(x_j^\ell m)}{\boldsymbol{x}_L^\ell}\right) = \iota.$$

Herved følger, at

$$d^{t-1}(\gamma^t(\iota)) + \gamma^{t+1}(d^t(\iota)) = d^{t-1}(0) + \iota = \iota.$$

Antag nu, at $j \in L$. Da er $j = l_{\tilde{s}}$ for et $\tilde{s} \in \{1,\dots,t\}$. Af definitionen følger

$$d^{t-1}\left(\gamma^t(\iota)\right) = d^{t-1}\left((-1)^{\tilde{s}-1} \frac{\varphi^{-\ell}(m)}{\boldsymbol{x}_{L\setminus\{j\}}^\ell}\right) = \sum_{\substack{J \in \mathscr{D}(t,n) \\ \exists s \in \{1,\dots,t\} \\ J_s = L\setminus\{j\}}} (-1)^{s-1}(-1)^{\tilde{s}-1} \frac{\varphi^{-\ell}(m) x_{j_s}^\ell}{\boldsymbol{x}_J^\ell}.$$

I summen (9) summeres der over mængder, der alle indeholder L, hvorved enhver $K \in \mathscr{D}(t+1,n)$ som indgår i summen indeholder j. På baggrund af dette følger, at

$$\gamma^{t+1}\left(d^t(\iota)\right) = \sum_{\substack{K \in \mathscr{D}(t+1,n) \\ \exists s,s' \in \{1,\dots,t+1\} \\ K_s = L, j = k_{s'}}} (-1)^{s-1}(-1)^{s'-1} \frac{\varphi^{-\ell}(m x_{k_s}^\ell)}{\boldsymbol{x}_{K\setminus\{j\}}^\ell}.$$

Kald nu $(d^{t-1} \circ \gamma^t)(\iota) + (\gamma^{t+1} \circ d^t)(\iota)$ for $\tilde{\iota}$. Af ovenstående sluttes, at for $L' \in \mathscr{D}(t,n)$ er komponenenten af $\tilde{\iota}$ i $I_{\boldsymbol{x}_{L'}}$ nul, hvis der ikke findes $l' \in \{1,\dots,n\} \setminus L_{\tilde{s}}$, så $L' = L_{\tilde{s}} \cup \{l'\}$. Antag nu, at $L' = L_{\tilde{s}} \cup \{l'\} = (L \setminus \{j\}) \cup \{l'\}$ for et $l' \in \{1,\dots,n\} \setminus L_{\tilde{s}}$. Antag først, at $l' < j$. Bemærk, at da vil $j \notin L'$. Da er $l' = l'_u$, hvor $u \leq \tilde{s}$. Herved er $L'_u = L' \setminus \{l'\} = L \setminus \{j\}$. Herved følger, at komponenten af $d^{t-1}\left(\gamma^t(\iota)\right)$ i $I_{\boldsymbol{x}_{L'}}$ er da

$$(-1)^{u-1}(-1)^{\tilde{s}-1} \frac{\varphi^{-\ell}(m) x_{l'}^\ell}{\boldsymbol{x}_{L'}^\ell}.$$

I mængden $K' = L' \cup \{j\} \in \mathscr{D}(t+1,n)$ vil $j = k'_{\tilde{s}+1}$ og $l' = k'_u$. Tilsvarende haves således, at komponenten af $\gamma^{t+1}(d^t(\iota))$ i $I_{\boldsymbol{x}_{L'}}$ er

$$(-1)^{u-1}(-1)^{\tilde{s}}\frac{\varphi^{-\ell}(m)x_{l'}^{\ell}}{\boldsymbol{x}_{L'}^{\ell}}.$$

hvorfor komponenten af $\tilde{\iota}$ i $I_{\boldsymbol{x}_{L'}}$ er nul. Tilsvarende argument giver, at hvis $l' > j$, vil komponenten af $\tilde{\iota}$ på $I_{\boldsymbol{x}_{L'}}$ være nul. For $L' = L$ haves, at komponenten for $d^{t-1}(\gamma^t(\iota))$ i $I_{\boldsymbol{x}_L}$ er

$$(-1)^{\tilde{s}-1}(-1)^{\tilde{s}-1}\frac{\varphi^{-\ell}(m)x_j^{\ell}}{\boldsymbol{x}_L^{\ell}} = \frac{m}{\boldsymbol{x}_L^{\ell}} = \iota,$$

mens komponenten af $\gamma^{t+1}\left(d^t\left(\iota\right)\right)$ på $I_{\boldsymbol{x}_L}$ er nul, idet $j \in L$. Af dette følger, at $\tilde{\iota} = \iota$.

På baggrund af ovenstående konkluderes, at identiteten og nulafbildningen på $I \otimes_R C^\bullet$ er homotopiske via $\gamma^\bullet$. Herved følger, at $I \otimes_R C^\bullet$ er split-eksakt, så der sluttes, at $\mathrm{H}^i(I \otimes_R C^\bullet) = 0$ for alle $i \in \mathbb{Z}$.

Der vil nu blive vist, at for en R-moduler M, er $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \mathrm{H}^i(M \otimes_R C^\bullet)$ for alle $i \geq 0$. Beviset føres ved induktion efter i. For $i = 0$ er det allerede vist, at

$$\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M) \cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \cong \mathrm{H}^0(M \otimes_R C^\bullet).$$

Lad derfor $i > 0$. Modulen M kan indlejres i en injektiv modul I, og vil

$$0 \to M \hookrightarrow I \to I/\operatorname{im}\alpha \to 0$$

være en kort eksakt følge, idet α betegner den givne indlejring. I tilfældet $i = 1$ giver den lange eksakte følge i kohomologi, og at I er injektiv, at

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(I) \xrightarrow{\beta} \Gamma_{\mathfrak{m}}(I/\operatorname{im}\alpha) \xrightarrow{d_1} \mathrm{H}^1(M \otimes_R C^\bullet) \longrightarrow 0$$

er eksakt. Tilsvarende haves, at

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(I) \xrightarrow{\beta} \Gamma_{\mathfrak{m}}(I/\operatorname{im}\alpha) \xrightarrow{d_2} \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0$$

er eksakt. Herved følger, at

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1(M \otimes_R C^\bullet) &\cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(I/\operatorname{im}\alpha)/\ker d_1 \cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(I/\operatorname{im}\alpha)/\operatorname{im}\beta \\ &\cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(I/\operatorname{im}\alpha)/\ker d_2 \cong \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(M).\end{aligned}$$

For $i > 1$ giver de lange eksakte følger i kohomologi, at

$$\mathrm{H}^i(M \otimes_R C^\bullet) \cong \mathrm{H}^{i-1}(I/\operatorname{im}\alpha \otimes_R C^\bullet) \text{ og } \mathrm{H}^{i-1}_{\mathfrak{m}}(I/\operatorname{im}\alpha) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M),$$

hvorfor resultatet følger af induktionshypotesen. □

Bilag C. Simplicial homologi af simplicialle komplekser

For et simplicialt kompleks er defineret en række moduler, som kaldes den simpliciale homologi af komplekset. Formålet med dette kapitel er, at definere disse moduler og give konkrete beregninger af disse i en række tilfælde. Visse af påstandene svarer til velkendte resultater i singulær homologi, men her vælges at give beviser, som er rent algebraiske. Motivationen for dette er, at nogle af resultaterne anvendes før geometrisk realisation er blev introduceret. Desuden er simplicial homologi et algebraisk begreb og det er således tilfredstillende at give beviser, der holder sig indenfor den givne teori, i stedet for at benytte hovedsætninger fra algebraisk topologi.

C.1. **Simplicial homologi.** For et simplicialt kompleks tilknyttes et kædekompleks, som giver anledning beregning af simplicial homologi og kohomologi. Dette kædekompleks kan gives koefficienter i en vilkårlig abelsk gruppe. For videre beregninger er det vigtigt, at både simplicial homologi og kohomologi med koefficienter i et legeme, kan betragtes som vektorrum over dette.

Definition C.1.1. *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V. En orientering af Δ er en lineær ordning af V. For $F = \{v_0, \dots, v_i\} \in \Delta$, skrives $F = [v_0, \dots, v_i]$, hvis $v_0 < \cdots < v_i$ med hensyn til den linære ordning på V. For $0 \leq s \leq i$ lad $F_s = [v_0, \dots, \hat{v}_s, \dots, v_i]$.*

Definition C.1.2. *For et orienteret simplicialt kompleks Δ på V af dimension $d-1$, er $\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)$ kædekomplekset:*

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathscr{C}}_{d-1}(\Delta) \longrightarrow \widetilde{\mathscr{C}}_{d-2}(\Delta) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \widetilde{\mathscr{C}}_0(\Delta) \longrightarrow \widetilde{\mathscr{C}}_{-1}(\Delta) \longrightarrow 0$$

hvor for $i \in \{-1, \dots, d-1\}$

$$\widetilde{\mathscr{C}}_i(\Delta) = \bigoplus_{F \in \Delta, \dim F = i} \mathbb{Z}F$$

og for $F = [v_0, \dots, v_i] \in \Delta$ er differentialet

$$\delta_i^{\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)}(F) = \sum_{s=0}^{i} (-1)^s F_s.$$

Den reducerede simpliciale homologi af Δ er da defineret ved, at for $i \in \mathbb{Z}$, er

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta) = \mathrm{H}_i(\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)).$$

Lad $\mathscr{C}(\Delta)$ være komplekset, der fremkommer ved at

$$\mathscr{C}_i(\Delta) = \begin{cases} \widetilde{\mathscr{C}}_i(\Delta) & i \neq -1 \\ 0 & i = -1 \end{cases}$$

og differentialerne er $\delta_i^{\mathscr{C}(\Delta)} = \delta_i^{\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)}$ for $i \neq 0$ mens $\delta_0^{\mathscr{C}(\Delta)}$ er nulhomomorfien. Den simpliciale homologi af Δ er da tilsvarende defineret ved, at for $i \in \mathbb{Z}$, er

$$\mathrm{H}_i(\Delta) = \mathrm{H}_i(\mathscr{C}(\Delta)).$$

Definition C.1.3. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og G være en abelsk gruppe. Den i'te reducerede simpliciale homologi af Δ med koefficienter i G for et $i \in \mathbb{Z}$ defineres ved*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta; G) = \mathrm{H}_i(\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} G)$$

Den i'te reducerede simpliciale kohomologi $\widetilde{\mathrm{H}}^i(\Delta; G)$ af Δ med koefficienter i G defineres tilsvarende ved

$$\widetilde{\mathrm{H}}^i(\Delta; G) = \mathrm{H}^i(\mathrm{hom}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta), G)).$$

Analogt defineres simplicial homologi og kohomologi med koefficienter i G som homologi og kohomologi af komplekserne $\mathscr{C}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ og $\mathrm{hom}_{\mathbb{Z}}(\mathscr{C}(\Delta), G)$, og disse betegnes $\mathrm{H}_\bullet(\Delta; G)$ henholdsvis $\mathrm{H}^\bullet(\Delta; G)$.

Bemærkning C.1.4. *Lad Δ være et simplicialt kompleks og k et legeme. Da $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} k \cong k$ og tensorprodukt kommuterer med direkte sum, vil for $i \in \mathbb{Z}$*

$$\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)_i \otimes_{\mathbb{Z}} k \cong \bigoplus_{F \in \Delta, \dim F = i} kF$$

som $\mathbb{Z}$-moduler. Således har $\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ en naturlig struktur som k-vektorrum og med denne vil differentialerne $\delta^{\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ være k-lineære afbildninger. Ligeledes vil $\mathrm{hom}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)_i, k)$ for et $i \in \mathbb{Z}$ på naturlig vis være et k-vektorrum, idet for $\lambda \in k$,

$\varphi \in \hom_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)_i, k)$ *og* $\omega \in \widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)_i$ *sættes* $(\lambda\varphi)(\omega) = \lambda(\varphi(\omega))$. *Differentialerne* $\hom_{\mathbb{Z}}(\delta_i^{\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)}, k)$ *er da k-lineære afbildninger.*

Således vil både $\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)\otimes_{\mathbb{Z}} k$ *og* $\hom_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta), k)$ *være kædekomplekser af k-vektorrum. Deres homologi- henholdvis kohomologigrupper* $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta; k)$ *og* $\widetilde{\mathrm{H}}^i(\Delta; k)$ *er således k-vektorrum for alle* $i \in \mathbb{Z}$.

C.2. **Simplicial homologi af forening af komplekser.** Der vil nu blive defineret foreningen af to simpliciale komplekser. Det viser sig, at i tilfældet af simplicial homologi med koefficienter i et legeme, kan den simpliciale homologi af en forening beregnes på baggrund af den simpliciale homologi af hver af de indgående komplekser.

Definition C.2.1. *Lad Δ og Γ være simpliciale komplekser på henholdvis V og W. Hvis V og W er disjunkte, er foreningen af Δ og Γ givet ved:*

$$\Delta * \Gamma = \{F \cup G \mid F \in \Delta, G \in \Gamma\}.$$

Bemærk, at dette er et simplicialt kompleks på $V \cup W$.

Hvis Δ og Γ er orienterede simpliciale komplekser, er der således givet en lineær ordning på både V og W. Da findes der en lineær ordning på $V \cup W$, ved at alle knuderne i V kommer før knuderne i W og deres indbyrdes ordning er nedarvet fra de lineære ordninger på V og W. Da er $\Delta * \Gamma$ et orienteret simplicialt kompleks. Hvis ikke andet er angivet, så antages der, at $\Delta * \Gamma$ er udstyret med denne orientering.

Bemærkning C.2.2. *Foreningen af simpliciale komplekser er associativ i den forstand, at hvis Δ, Γ og Λ er simplicialle komplekser på parvis disjunkte mængder, vil* $(\Delta * \Gamma) * \Lambda = \Delta * (\Gamma * \Lambda)$.

Hvis $C_\bullet$ med differentialer δ_i og $j \in \mathbb{N}$, vil i det følgende $C_\bullet[-j]$ være kædekomplekset, der fremkommer ved:

$$(C_\bullet[-j])_i = C_{i-j}, \quad \delta_i^{C_\bullet[-j]} = \delta_{i-j}.$$

Suspensionen af $C_\bullet$ defineres da ved, at $\Sigma C_\bullet = C_\bullet[-1]$.

For Δ og Γ simpliciale komplekser på disjunkte mængder benyttes i det følgende notationen, at $\delta_i^{\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)\otimes_{\mathbb{Z}}\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma)} = \delta_i^{\Delta\otimes\Gamma}$. Tilsvarende vil forkortelsen $\delta_i^{\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)} = \delta_i^{\Delta}$ anvendes.

Lemma C.2.3. *For Δ og Γ simpliciale komplekser på disjunkte mængder V og W gælder der, at*

$$\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta * \Gamma) \cong \Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma),$$

hvor Σ betegner suspensionen af de givne kædekomplekser.

Bevis. Bemærk, at for et simplicial kompleks Δ på V, vil for $i \in \mathbb{Z}$

$$\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)_i = \bigoplus_{F\in\Delta, |F|=i} \mathbb{Z}F.$$

Der gælder, at for $F \in \Delta$ og $G \in \Gamma$, vil $F \cap G = \emptyset$. Herved følger, at for $i \in \mathbb{Z}$, vil

$$\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta * \Gamma)_i = \bigoplus_{H\in\Delta*\Gamma, |H|=i} \mathbb{Z}H = \bigoplus_{\substack{F\in\Delta, G\in\Gamma \\ |F|+|G|=i}} \mathbb{Z}F \cup G.$$

Da $\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)$ og $\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma)$ begge er kædekomplekser bestående af frie $\mathbb{Z}$-moduler, vil det samme gøre sig gældende for $\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma)$. Idet for $i \in \mathbb{Z}$, vil

$$(\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma))_i = \bigoplus_{\substack{F\in\Delta, G\in\Gamma \\ |F|+|G|=i}} \mathbb{Z}(F \otimes_{\mathbb{Z}} G).$$

For $i \in \mathbb{Z}$ lad

$$\psi_i \colon \Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta * \Gamma)_i \to (\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma))_i$$

være $\mathbb{Z}$-homomorfien givet ved, at $\psi_i(F \cup G) = F \otimes_{\mathbb{Z}} G$ for $F \in \Delta$ og $G \in \Gamma$ med $|F| + |G| = i$. Da er ψ_i bijektiv.

Hvis der for et $i \in \mathbb{Z}$ ikke findes $F \in \Delta$ og $G \in \Gamma$ med $|F| + |G| = i$ vil

$$\delta_i^{\Delta \otimes \Gamma} \circ \psi_i = 0 = \psi_{i-1} \circ \delta_i^{\Delta * \Gamma}.$$

Antag, at der for et $i \in \mathbb{Z}$ findes $F \in \Delta$ og $G \in \Gamma$ med $|F| + |G| = i$. Lad $F = [v_0, \dots, v_n]$ og $G = [w_0, \dots, w_m]$ med hensyn til orienteringerne af Δ og Γ. Da er $F \cup G = [v_0, \dots, v_n, w_0 \dots, w_m]$, hvorfor

$$\begin{aligned}\delta_i^{\Delta * \Gamma}(F \cup G) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n, w_0, \dots, w_m] \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m} (-1)^{n+1+i} [v_0, \dots, v_n, w_0, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_m] \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F_i \cup G + (-1)^{|F|} \sum_{j=0}^{m} (-1)^i F \cup G_i.\end{aligned}$$

Således vil

$$\begin{aligned}\psi_{i-1}(\delta_i^{\Delta * \Gamma}(F \cup G)) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F_i \otimes_{\mathbb{Z}} G + (-1)^{|F|} \sum_{j=0}^{m} (-1)^i F \otimes_{\mathbb{Z}} G_i \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i F_i \right) \otimes_{\mathbb{Z}} G + (-1)^{|F|} F \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\sum_{j=0}^{m} (-1)^i G_i \right) \\ &= \delta_{n+1}^{\Delta}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} G + (-1)^{|F|} F \otimes_{\mathbb{Z}} \delta_{m+1}^{\Gamma}(G) \\ &= \delta_i^{\Delta \otimes \Gamma}(F \otimes_{\mathbb{Z}} G) = \delta_i^{\Delta \otimes \Gamma}(\psi_i(F \cup G)).\end{aligned}$$

Da både differentialerne og $\psi_\bullet$ er $\mathbb{Z}$-homomorfier, følger nu af ovenstående, at

$$\delta_i^{\Delta \otimes \Gamma} \circ \psi_i = \psi_{i-1} \circ \delta_i^{\Delta * \Gamma}.$$

Herved er $\psi_\bullet$ en $\mathbb{Z}$-homomorfi fra kædekomplekset $\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta * \Gamma)$ til $\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma)$, hvor hver indgående homomorfi er bijektiv, hvorfor der konkluderes, at $\psi_\bullet$ er en isomorfi mellem de to kædekomplekser. $\square$

Sætning C.2.4. *Lad Δ og Γ simpliciale komplekser på de disjunkte mængder V og W. For et legeme k vil der for alle $i \in \mathbb{Z}$ gælde, at som k-vektorrum er*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\Delta * \Gamma; k) \cong \bigoplus_{n+m=i} \widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(\Delta; k) \otimes_k \widetilde{\mathrm{H}}_{m-1}(\Gamma; k).$$

Bevis. Bemærk, at $\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta)$ og $\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma)$ begge er kædekomplekser af frie $\mathbb{Z}$-moduler. Af Künneths Theorem med koefficienter i et legeme, som formuleret i [5, Theorem 58.5.] følger, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ er som k-vektorrum:

$$\bigoplus_{n+m=i} \mathrm{H}_n(\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} k) \otimes_k \mathrm{H}_m(\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} k) \cong \mathrm{H}_i((\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} k).$$

Kædekompleksisomorfien fra beviset for Lemma C.2.3 vil på naturlig vis kunne udvides til en isomofi mellem kædekomplekserne

$$(\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} k \cong (\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta * \Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} k$$

betragtet som kædekomplekser af vektorrum over k. Herved konkluderes:

$$\begin{aligned}\bigoplus_{n+m=i} \widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(\Delta;k) \otimes_k \widetilde{\mathrm{H}}_{m-1}(\Gamma;k) &= \bigoplus_{n+m=i} \mathrm{H}_n(\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} k) \otimes_k \mathrm{H}_m(\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} k) \\ &\cong \mathrm{H}_i((\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} k) \\ &\cong \mathrm{H}_i((\Sigma\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta * \Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\Delta * \Gamma; k). \qquad \square\end{aligned}$$

C.3. **Simplicial homologi af to typer af foreninger.** Resultatet fra foregående sektion vil blive benyttet til at fastlægge den simpliciale homologi med koefficienter i et legeme for to typer af foreninger.

Definition C.3.1. *Lad V være en ikke tom mængde. For $F \subseteq V$ defineres $\langle F\rangle = \mathcal{P}(F)$. Herved er $\langle F\rangle \subseteq \mathcal{P}(V)$ og opfylder indlysende betingelserne for at være et simplicialt kompleks på V.*

For $F \subseteq V$, som er forskellig fra den tomme mængde, defineres $\mathcal{S}^F = \mathcal{P}(F)\setminus\{F\}$. Dette er ligeledes et simplicialt kompleks på V.

Bemærk, at for $F \subseteq V$ med $|F| > 1$ vil den geometriske realisation af $\mathcal{S}^F$ være homeomorfisk med den topologiske sfære $S^{|F|-2}$.

Sætning C.3.2. *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V. Antag, at der findes $F \in \Delta$, hvor $F \neq \emptyset$, og et simplicialt kompleks Δ' på $V \setminus F$, så $\Delta = \langle F\rangle * \Delta'$. Da vil for et legeme k gælde, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ er $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta;k) = 0$.*

Bevis. Lad $w \in F$ og sæt $F' = F \setminus \{w\}$. Da vil $F' \in \Delta$, og der gælder, at $\Delta'' = \langle F'\rangle * \Delta'$ er et simplicialt kompleks på $V\setminus\{w\}$. Herved vil følgende være veldefineret:

$$\langle\{w\}\rangle * \Delta'' = \langle\{w\}\rangle * (\langle F'\rangle * \Delta') = (\langle\{w\}\rangle * \langle F'\rangle) * \Delta' = \langle F\rangle * \Delta' = \Delta.$$

Der haves, at $\widetilde{\mathscr{C}}(\langle\{w\}\rangle) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ er kædekomplekset:

$$0 \longrightarrow k\{w\} \xrightarrow{\delta} k\emptyset \longrightarrow 0,$$

hvor $\delta(r\{w\}) = r\emptyset$. Herved er δ en isomorfi, og kædekomplekset $\widetilde{\mathscr{C}}(\langle\{w\}\rangle \otimes_{\mathbb{Z}} k$ er eksakt. Således haves, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ vil $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\langle\{w\}\rangle;k) = 0$. Sætningen følger nu umiddelbart af Sætning C.2.4. $\square$

Lemma C.3.3. *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V, og $F \subseteq W$, hvor $F \neq \emptyset$ og V og W er disjunkte. Lad $\Delta' = \mathcal{S}^F * \Delta$ og k være et legeme. For det simplicial kompleks Δ' gælder således, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ vil $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta';k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-\dim F}(\Delta;k)$.*

Bevis. Beviset føres ved induktion efter $\dim F$. Hvis $\dim F = 0$, er $\Delta' = \Delta$ og lemmaet er opfyldt. Betragt nu specialtilfældet, hvor $\dim F = 1$ og $\Delta = \{\emptyset\}$. Da er $\Delta' = \{\emptyset, \{w_1\}, \{w_2\}\}$, så det $\widetilde{\mathscr{C}}(\Delta') \otimes_{\mathbb{Z}} k$ er komplekset

$$0 \longrightarrow k\{v\} \oplus k\{w\} \xrightarrow{\delta_0} k\emptyset \longrightarrow 0$$

hvor $\delta_0(k_1\{v\} + k_2\{w\}) = (k_1 + k_2)\emptyset$. Der gælder, at δ_0 er surjektiv med $\ker \delta_0 = k(\{v\} - \{w\})$. Herved sluttes, at

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta';k) \cong \begin{cases} k & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\{\emptyset\};k) = \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\Delta;k)$$

Antag nu, at $\dim F > 0$. Lad $v \in F$ og sæt $G = F\setminus\{v\}$. Lad $H \subsetneq F$. Hvis $v \notin H$, er $H \subseteq G$. Hvis $v \in H$, vil $H\setminus\{v\} \subsetneq G$. Da gælder således, at $(\mathcal{S}^G * \langle\{v\}\rangle) \cup \langle G\rangle = \mathcal{S}^F$. Bemærk, at $(\mathcal{S}^G * \langle\{v\}\rangle) \cap \langle G\rangle = \mathcal{S}^G$. Da enten $\dim F > 1$ eller $\Delta \neq \{\emptyset\}$, vil $\mathcal{S}^G * \Delta \neq \{\emptyset\}$, hvorfor Mayer-Vietoris følgen i reduceret homologi for paret

$$((\mathcal{S}^G * \langle\{v\}\rangle) * \Delta, \langle G\rangle * \Delta)$$

er nedenstående eksakte følge:

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow &\widetilde{\mathrm{H}}_i((\mathcal{S}^G * \langle\{v\}\rangle) * \Delta; k) \oplus \widetilde{\mathrm{H}}_i(\langle G\rangle * \Delta; k) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta'; k)\\ &\longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\mathcal{S}^G * \Delta; k) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}((\mathcal{S}^G * \langle\{v\}\rangle) * \Delta; k) \oplus \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\langle G\rangle * \Delta; k) \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

I henhold til Sætning C.3.2 er simplicial homologi for både $(\mathcal{S}^G * \langle\{v\}\rangle) * \Delta$ og $\langle G\rangle * \Delta$ med koefficienter i k nul. Af den lange eksakte følge konkluderes således, at for $i \in \mathbb{Z}$ er

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta'; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\mathcal{S}^G * \Delta; k).$$

Af induktionshypotesen sluttes nu, at for alle $i \in \mathbb{Z}$ er

$$\widetilde{\mathrm{H}}_i(\Delta'; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\mathcal{S}^G * \Delta; k) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1-\dim G}(\Delta; k) = \widetilde{\mathrm{H}}_{i-\dim F}(\Delta; k). \qquad \square$$

C.4. **Stjerne og lænke.** I stil med resultaterne i foregående afsnit vises nu to egenskaber ved delkomplekser, der fremkommer ved at benytte stjerne og lænke flere gange.

Lemma C.4.1. *Lad Δ være et simplicialt kompleks, og lad $F \in \Delta$. For $G \in \mathrm{lk}_\Delta F$, er $\mathrm{lk}_{\mathrm{lk}_\Delta F} G = \mathrm{lk}_\Delta(F \cup G)$.*

Bevis. Lad $F \in \Delta$ og $G \in \mathrm{lk}_\Delta F$. Bemærk, at da vil $G \cup F \in \Delta$ og $G \cap F = \emptyset$.

I henhold til definitionen er

$$\mathrm{lk}_{\mathrm{lk}_\Delta F} G = \{H \subseteq V \mid (H \cup G) \cup F \in \Delta, (H \cup G) \cap F = \emptyset, H \cap G = \emptyset\}.$$

Da $F \cap G = \emptyset$ haves derved, at

$$\emptyset = (H \cup G) \cap F = (H \cap F) \cup (G \cap F) = H \cap F,$$

hvorfor

$$\mathrm{lk}_{\mathrm{lk}_\Delta F} G = \{H \subseteq V \mid (H \cup G) \cup F \in \Delta, H \cap F = \emptyset, H \cap G = \emptyset\}.$$

Tilsvarende vil

$$\mathrm{lk}_\Delta(F \cup G) = \{H \subseteq V \mid H \cup (F \cup G) \in \Delta, H \cap (F \cap G) = \emptyset\}.$$

Idet $H \cap (F \cup G) = (H \cap F) \cup (H \cap G)$ er betingelsen $H \cap (F \cup G) = \emptyset$ ækvivalent med, at både $H \cap F$ og $H \cap G$ er den tomme mængde. Da foreningsmængde er associativ, giver disse betragtninger, af de to mængder er ens. $\square$

Lemma C.4.2. *Lad Δ være et simplicialt kompleks på V. Lad $F \in \Delta$ og $G \in \mathrm{lk}_\Delta F$. Hvis $G \neq \emptyset$, vil for et legeme k haves $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta G} F; k) = 0$ for alle $i \in \mathbb{Z}$.*

Bevis. Det vil først blive vist, at

$$\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta G} F = \langle G\rangle * \mathrm{lk}_{\mathrm{lk}_\Delta G} F.$$

I henhold til definitionen, er

$$\mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta G} F = \{H \subseteq V \mid H \cup F \in \mathrm{st}_\Delta G, H \cap F = \emptyset\} = \{H \subseteq V \mid H \cup F \cup G \in \Delta, H \cap F = \emptyset\}.$$

Tilsvarende er

$$\begin{aligned}\mathrm{lk}_{\mathrm{lk}_\Delta G} F &= \{H \subseteq V \mid H \cup F \in \mathrm{lk}_\Delta G, H \cap F = \emptyset\}\\ &= \{H \subseteq V \mid H \cup F \cup G \in \Delta, (H \cup F) \cap G = \emptyset, H \cap F = \emptyset\}\\ &= \{H \subseteq V \mid H \cup F \cup G \in \Delta, H \cap G = \emptyset, H \cap F = \emptyset\},\end{aligned}$$

idet $G \in \mathrm{lk}_\Delta F$, så $F \cap G = \emptyset$.

Givet $H \in \mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta G} F$, kan $H = H_1 \cup H_2$, hvor $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ og $H_1 \subseteq G$. Af ovenstående følger, at $H_2 \in \mathrm{lk}_{\mathrm{lk}_\Delta G} F$. Tilsvarende vil der for $H_1 \subseteq G$ og $H_2 \in \mathrm{lk}_{\mathrm{lk}_\Delta G} F$ gælde, at $(H_1 \cup H_2) \cap F = \emptyset$, idet $H_1 \subseteq G$ og $G \cap F = \emptyset$. Da

$$(H_1 \cup H_2) \cup F \cup G = H_2 \cup F \cup G \in \Delta,$$

haves, at $H_1 \cup H_2 \in \mathrm{lk}_{\mathrm{st}_\Delta G} F$.

Da $G \neq \emptyset$ følger lemmaet nu direkte af Korollar C.3.2. $\square$

Litteratur

[1] A. Brøndsted. *An introduction to convex polytopes*. Springer, 1983.
[2] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay rings, volume 39 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
[3] H.B. Foxby. Homological algebra. Lagt på nettet, January 2006. Kursusnoter.
[4] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge Univ Pr, 2002.
[5] R.M. JAMES. *Elements of Algebraic Topology*. Addison Wesley, Redwood City, California, 1984.
[6] G. Kalai. Many triangulated spheres. *Discrete and Computational Geometry*, 3(1):1–14, 1988.
[7] P. McMullen. The maximum numbers of faces of a convex polytope. *Mathematika, Lond*, 17:179–184, 1970.
[8] P. McMullen, G.C. Shephard, et al. Convex polytopes and the upper bound conjecture. *London Math. Soc. Lecture Note Series*, 3, 1971.
[9] R. P. Stanley. *Combinatorics and Commutative Algebra Second Edition*. Number 41 in Progress in Matematics. Birkhäuser, 1996.
[10] R.P. Stanley. The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings. *Studies in Applied Math*, 54:135–142, 1975.
[11] A. Thorup. Kommutativ algebra. Lagt på nettet, 2005. Kursusnoter.
[12] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Univ Pr, 1995.