

**Bachelorprojekt i matematik. Institut for matematiske fag,
Københavns Universitet**

KAOS I DISKRETE BIOLOGISKE MODELLER

Sebastian Holmegaard Schwarze

2. juni 2015

Veljeder: Jesper Michael Møller

Abstract. The aim of this project is to introduce the reader to discrete dynamical systems and chaos through theory and examples, and to illustrate the rather long way from a formal definition of chaos to its actual uses in biology. In particular, the basic notion of a discrete dynamical system is explained and fundamental concepts and results are introduced. Furthermore, different definitions of chaos are presented and applied to various examples. Lastly, the chaotic properties of the giant squid axon are discussed by giving an account of the experimental work done in [14,15,16] and subsequently analyzing a proposed neuron model with the tools developed in the present paper.

Indledning

Begrebet kaos er gennem tiden blevet brugt til at beskrive en lang række forskellige fænomener, og vi har nok alle en forestilling om, hvad kaos er. Tit beskrives kaos som en højst irregulær og uforudsigelig opførsel, hvor små ændringer kan have store konsekvenser i fremtiden, hvilket i folkemunde tit bliver kaldt “butterfly”-effekten. Analogien er her, at en sommerfugls vingeslag i ét land kan forårsage en storm i et andet, fordi vejret er kaotisk. I løbet af 1950’erne begyndte man at undersøge sådanne systemer, hvilket resulterede i en formel kaos-teori med formelle definitioner af kaos. Som vi skal se, er der stadig ikke generel enighed om én specifik definition af kaos, men der er derimod flere forskellige definitioner, der alle prøver at specificere den intuitive forestilling om kaos.

En af de revolutionerende indsigter, som man fik gennem kaos-teori, var, at et system med en meget kompleks opførsel ikke nødvendigvis behøvede at være drevet af komplekse mekanikker, som man hidtil ville have regnet med. Et af de centrale koncepter i kaos-teori er nemlig, at et system kan have en højst uforudsigelig opførsel på trods af, at de underliggende dynamikker er deterministiske, og endda kan beskrives med simple ligninger. Denne indsigt har ændret mange naturvidenskaber, og specielt i biologien har kaos-teori haft stor succes.

I dette projekt vil vi da se på, hvad kaos er, og hvordan den er blevet anvendt i biologi til at forklare komplekse, observerede fænomener. I første afsnit præsenteres diskrete dynamiske systemer som grundlaget for en række forslag på en formel definition af kaos. Herefter udvikles redskaber, som muliggør en analyse af fysiske fænomener m.h.t. deres eventuelt kaotiske opførsel, og til slut vil vi se på, hvordan disse redskaber kan bruges til at analysere biologiske neuroner og neuronmodeller.

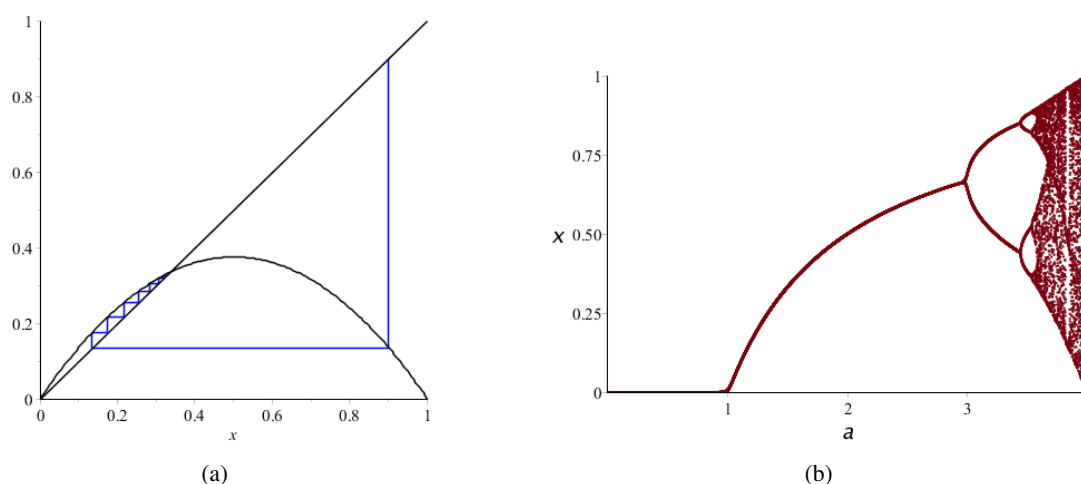
Gennem hele projektet er der lagt stor vægt på eksempler og visuel fremstilling som forklarende faktor for en lettere læsning og forståelse.

Diskrete Dynamiske Systemer

Generelle begreber og resultater Lad os indledningsvist introducere begrebet *diskret dynamisk system* og nogle grundlæggende resultater herom. I det følgende vil vi da benytte terminologi og notation som introduceret af M. Martelli [1].

Ved et (reelt) diskret dynamisk system (DDS) forstås en mængde af tilstande $X \subset \mathbb{R}^n$ (også kaldet tilstandsrum eller faserum) sammen med en funktion $F : X \rightarrow X$, der beskriver, hvordan man kommer fra én tilstand til den næste. Systemet er diskret i den forstand, at tilstandene ikke ændrer sig kontinuert, men i diskrete skridt, d.v.s. givet en tilstand $x_0 \in X$ er den næste tilstand $x_1 = F(x_0)$, dernæst $x_2 = F(F(x_0))$ osv. Følgen $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ kaldes da *banen* fra x_0 og benævnes $O(x_0)$. Mængden af fortætningspunkter for $O(x_0)$ benævnes $L(x_0)$.

Man kan tænke på et DDS som et fysisk system, der udvikler sig i løbet af diskrete tidsskridt, hvilket også vil kunne genkendes i meget af terminologien her. Et eksempel på et DDS kunne være den logistiske model $X = [0, 1]$ og $F(x) = 1.5x(1 - x)$. Vælges f. eks. starttilstanden $x_0 =$



Figur 1: **(a)** Cobweb-diagram af de første 8 iterationer (symboliseret af den blå trappelinje) af banen fra $x_0 = 0.9$ under funktionen $1.5x(1-x)$. **(b)** Bifurkationsdiagram for den logistiske familie af funktioner $ax(1-x)$, med a som bifurkationsparameter. For detaljer om, hvordan diagrammerne er blevet til, se appendiks A.

0.1 bliver de første tilstande i banen fra x_0 : $\{0.9, F(0.1) = 0.135, F(0.135) = 0.175, \dots\}$. Et nyttigt redskab til at visualisere sådan en bane er de såkaldte cobweb-diagrammer, som ofte indeholder en hel del nyttig information om systemet.

I fig. 1a ses et eksempel på et cobweb-diagram af den netop beregnede bane for den logistiske model. Grundlaget for et cobweb-diagram for en funktion F er grafen for F samt den rette linje $l(x) = x$. En bane visualiseres da i cobweb-diagrammet ved at starte i en starttilstand x_0 (i fig. 1a er $x_0 = 0.9$) på l , hvorefter man finder tilstanden x_1 ved at gå lodret ned/op på grafen for F og dernæst vandret hen på l igen. Gentages denne procedure, kan man da gå fra tilstand til tilstand, og dermed finde banen fra 0.9 (som vist i fig. 1a).

Det er ofte muligt at udtale sig om en banes opførsel på længere sigt ved at se på et cobweb-diagram, f. eks. kan man ud fra ovenstående diagram se, at banen $O(0.9)$ nærmer sig et helt bestemt tilstand. Det ser ydermere ud som om *alle* baner vil nærme sig dette punkt, men det vil vi vende tilbage til senere.

Lad os først se på to typer baner, som er specielt interessante, nemlig de stationære baner (punkter) og periodiske baner. Et *stationært punkt* (også kaldet *fikspunkt*) er en tilstand $x_s \in X$ for hvilken gælder, at $F(x_s) = x_s$. Det er ikke svært at se, at løsningerne til denne ligning netop er skæringspunkterne mellem grafen for F og linjen $l(x) = x$, hvilke kan aflæses på cobweb-diagrammer. De stationære punkter for funktionen $1.5x(1-x)$ er f.eks. $x_{s1} = 0$ og $x_{s2} = 1/3$.

En bane fra et punkt x_0 siges at være *periodisk* (med periode p), hvis der findes et $p \in \mathbb{N}$ sådan at $F^p(x_0) = x_0$ og $F^n(x_0) \neq x_0$ for alle $0 < n < p$ (her benævner F^n den n 'te iteration af F). Dette vil altså sige, at et stationært punkt er en periodisk bane med periode 1 og at en periodisk bane med periode p er et stationært punkt for funktionen F^p .

Ydermere siges en bane $O(x_0)$ at være *asymptotisk stationær/periodisk*, hvis den nærmer sig en stationær/periodisk bane asymptotisk. I dette tilfælde vil $L(x_0)$ være enten en singleton eller endelig. Bemærk, at eftersom $F(L(x_0)) = L(x_0)$, så er $L(x_0)$ en singleton h.h.v. endelig hvis $L(x_0)$ er en stationær h.h.v. periodisk bane.

En bane, der hverken er stationær, periodisk eller asymptotisk stationær/periodisk, siges at være *aperiodisk*.

En bane kaldes *stabil*, hvis andre baner, som ligger tæt på banen, forbliver tæt på den. Formelt defineres stabilitet ved en $\varepsilon - \delta$ -definition:

En bane $O(x_0)$ er stabil, hvis den opfylder, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y_0 \in X \forall n \in \mathbb{N} : \|x_0 - y_0\| < \delta \Rightarrow \|F^n(x_0) - F^n(y_0)\| < \varepsilon.$$

En bane, som *ikke* er stabil, siges da at være *ustabil*. Der findes en nyttig sætning, som giver en tilstrækkelig betingelse for, at stationære punkter er stabile, hvilken vi hurtig vil gennemgå til senere brug. Bemærk her, at et stationært punkt x_s kaldes *tiltrækkende*, hvis der eksisterer et $r > 0$ sådan at $y_n \rightarrow x_s$, når $\|y_0 - x_s\| < r$, og *frastødende*, hvis der eksisterer et $r > 0$ sådan, at der for enhver tilstand y_0 med $\|y_0 - x_s\| < r$ findes et $m > 0$ så $\|y_m - x_s\| > r$.

Sætning 1. Lad I være et åbent interval og x_s være et stationært punkt for en kontinuert funktion $F : I \rightarrow I$. Antag at der findes et $r > 0$ sådan at F er differentiabel på $(x_s - r, x_s + r)$, undtagen muligvis i x_s . Da er x_s stabil hvis $|F'(x)| \leq 1$ for $x \in (x_s - r, x_s + r)$.

Bevis. Antag at $|F'(x)| \leq 1$ for $x \in (x_s - r, x_s + r)$ og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vælg et x_0 sådan at $|x_s - x_0| < \min\{\varepsilon, r\}$. Jf. middelværdisætningen for differentiable funktioner findes da et $c \in (x_0, x_s) \subset (x_s - r, x_s + r)$ sådan at

$$F(x_s) - F(x_0) = F'(c)(x_s - x_0).$$

Dermed gælder at

$$|x_s - x_1| = |F(x_s) - F(x_0)| \leq |x_s - x_0|.$$

Af denne betragtning følger direkte, at

$$|F^n(x_s) - F^n(x_0)| \leq |x_s - x_0| < \varepsilon.$$

■

Sætning 2. Lad I være et åbent interval og x_s være et stationært punkt for en kontinuert funktion $F : I \rightarrow I$. Antag at der findes et $r > 0$ sådan at F er differentiabel på $(x_s - r, x_s + r)$, med kontinuert afledt i x_s . Da er x_s tiltrækkende h.h.v. frastødende hvis $|F'(x_s)| < 1$ h.h.v. $|F'(x_s)| > 1$.

Bevis. Antag at $|F'(x_s)| < 1$ for $x \in (x_s - r, x_s + r)$ og lad os vise, at x_s er stabilt. Vælg et $k \in (|F'(x_s)|, 1)$. Da F' er kontinuert i x_s kan et $d > 0$ vælges sådan at $F'(x_0) \leq k < 1$ for $x_0 \in [x_s - d, x_s + d] \subset (x_s - r, x_s + r)$. Middelværdisætningen giver da, at

$$|x_n - x_s| = |F^n(x_0) - F^n(x_s)| \leq k^n |x_s - x_0|.$$

Da $k < 1$ gælder altså, at $x_n \rightarrow x_s$ for alle $x_0 \in [x_s - d, x_s + d]$.

At x_s er frastødende hvis $|F'(x_s)| > 1$ vises på lignende vis.



Vi har allerede set et eksempel på et tiltrækkende fikspunkt i den logistiske model fra tidligere, nemlig $x_{s2} = 1/3$. Et par hurtige udregninger viser, at

$$|F'(x)| = 1.5 - 3x < 1 \text{ når } x \in \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

og pr. sætning 2 er x_{s2} da et tiltrækkende fikspunkt, hvilket underbygger vores mistanke fra tidligere.

Bifurkationsdiagrammer En ting, som man tit er interesseret i, når man arbejder med dynamiske systemer, er, hvordan systemet ændrer egenskaber som funktion af en parameter. Man kan f.eks. betragte den logistiske familie af funktioner $f(a, x) = ax(1 - x)$, $a \in (0, 4]$, $x \in [0, 1]$, og spørge sig, for hvilke værdier af a systemet har et stationært punkt. Lige i dette tilfælde vil svaret være de a , hvor ligningen

$$ax(1 - x) = x$$

har løsninger. Dette har den for alle a , og man kan endda finde samtlige stationære punkter som funktion af a . De er nemlig $x_{s1} = 0$ og $x_{s2} = 1 - 1/a$, $a \geq 1$. Man kan faktisk videre bestemme stabiliteten af disse punkter ved at bruge sætning 1:

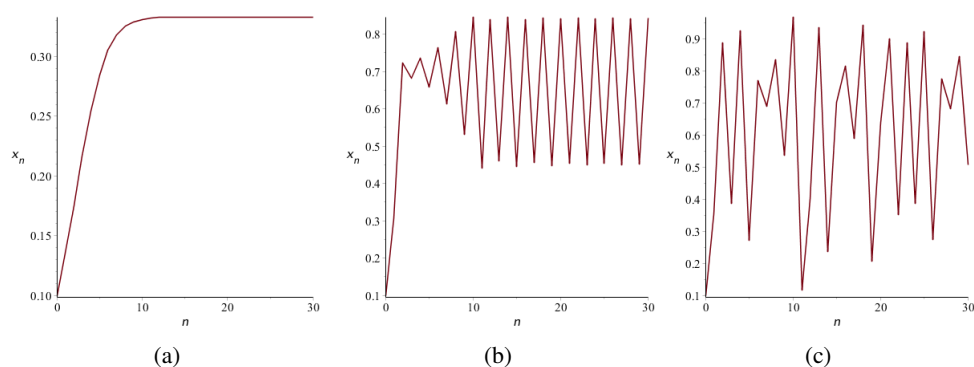
$$\begin{aligned} \left| f'_x(a, x_{s1}) \right| &= |a| \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 < a \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| f'_x(a, x_{s2}) \right| &= |a(1 - 2(1 - 1/a))| \leq 1 \\ \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3. \end{aligned}$$

Så, for $0 < a \leq 1$ har den logistiske model et unikt, stabilt fikspunkt x_s , men i $a = 1$ deler dette punkt sig i ét stabilt fikspunkt x_{s2} , og ét ustabil fikspunkt x_{s1} . Man siger da, at der sker en bifurkation i $a=1$, og specifikt kalder man denne type bifurkation, hvor et stabilt fikspunkt bliver til ét stabilt og ét ustabil fikspunkt, en saddle-node-bifurkation. En anden slags bifurkation kan observeres for $a = 3$, hvor den stabile, periodiske bane

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a}$$

opstår. Her bliver det stabile fikspunkt x_{s2} til to stabile periodiske punkter (bemærk, at for $a = 3$ er $x_{s2} = x_1 = x_2$), og en sådanne bifurkation kaldes periodefordoblende. For at få et overblik



Figur 2: Plot af de første 30 tilstande i banen $O(0.1)$ for (a) $a = 1.5$, (b) $a = 3.4$ og (c) $a = 3.9$. Banen i (a) er asymptotisk stabil, i (b) er den asymptotisk periodiske og i (c) kaotisk.

over, hvordan stabiliteten nedarves, og for hvilke værdier af a , der sker en kvalitativ ændring af systemet, kan man konstruere et bifurkationsdiagram, som vist i fig. 1b. Her indtegnes en bestemt banes asymptotiske opførsel som funktion af bifurkationsparameteren a , og herved kan blandt andet stabile, periodiske punkter identificeres. De to bifurkationer, som vi allerede har identificeret, kan f.eks. nemt genkendes i fig. 1b.

Kaos

Definitioner af kaos

For at introducere begrebet kaos, lad os benytte os af den logistiske model fra tidligere som illustrativt eksempel. Vi så, at opførslen af systemet givet ved funktionen $1.5x(1-x)$ kunne forudsiges relativt nemt, og at det var muligt at forudsige, hvordan en bane i systemet ville udvikle sig på længere sigt. I fig. 2 sammenlignes tre baner fra h.h.v. denne og to andre funktioner fra den logistiske familie $ax(1-x)$.

Man kan se, at størrelsen af parameteren a har en afgørende betydning for, hvor “pænt” systemet opfører sig, hvilket ligeså kan observeres i fig. 1b. For $a = 3.4$ i figur 2b ser det f. eks. ud til, at den asymptotisk stabile bane fra figur 2a er blevet til en periodisk bane (med periode 2), og for $a = 3.9$ i figur 2c ser det ud til, at banen er blevet mere eller mindre tilfældig. Det er denne tilsyneladende tilfældighed, som kaldes kaos.

Der er imidlertid ikke én enkelt formel definition af kaos, men en hel del. De første kaotiske systemer blev opdaget og undersøgt af blandt andet Henri Poincare i 1880’erne og senere Edward Lorenz i 1950’erne, men begrebet kaos blev første gang benyttet til at beskrive disse systemer af T. Li og J. Yorke i [2]. En version af Li-Yorke-definitionen på kaos for 1-dimensionale reelle systemer er specielt elegant og simpel ([1],p.95) :

Def. 1. Li-Yorke-kaos på intervaller. Lad $F : I \rightarrow I$ være kontinuert, hvor $I \subset \mathbb{R}$ er et begrænset interval. Da siges F at være kaotisk, hvis F har en periode-3 bane.

Denne definition kan måske virke overraskende, men den udspringer fra en meget forunderlig sætning, kaldet Sarkovskii's Sætning:

Sarkovskii's sætning. Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et interval og lad $F : I \rightarrow I$ være kontinuert. Antag at F har en periodisk bane med periode p . Da har F en periodisk bane med periode q , hvis q er større end p under Sarkovskii-ordningen af de naturlige tal:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 7 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 7 \prec \dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

En uddybende behandling af sætningen og et bevis kan findes i [3]. Det ses, at hvis F har en bane med periode 3, så siger Sarkovskii's sætning, at F har en periodisk bane med periode q for *alle naturlige tal* q . Ydermere viste Li og Yorke i [2], at eksistensen af en bane med periode 3 medfører eksistensen af en overtællelig mængde $S \in I$ sådan, at for alle $x \in S$ er banen $O(x)$ aperiodisk og ustabil i S .

Disse vigtige resultater motiverer altså Li-Yorke-definitionen af kaos, da eksistensen af uendelig mange periodiske baner og overtælleligt mange ustabile og aperiodiske baner, stemmer godt overens med en intuitiv forståelse af kaos.

Fordelen ved Li-Yorke definitionen af kaos på intervaller er, at den er så nem at bruge. Betragt f. eks. den logistiske funktion $F(x) = 3.9x(1-x)$ fra tidligere. Løses ligningen

$$F^3(x) = x$$

numerisk fås en 3-periodisk bane $\{0.134\dots, 0.448\dots, 0.964\dots\}$. Altså er F kaotisk i Li-Yorkes forstand.

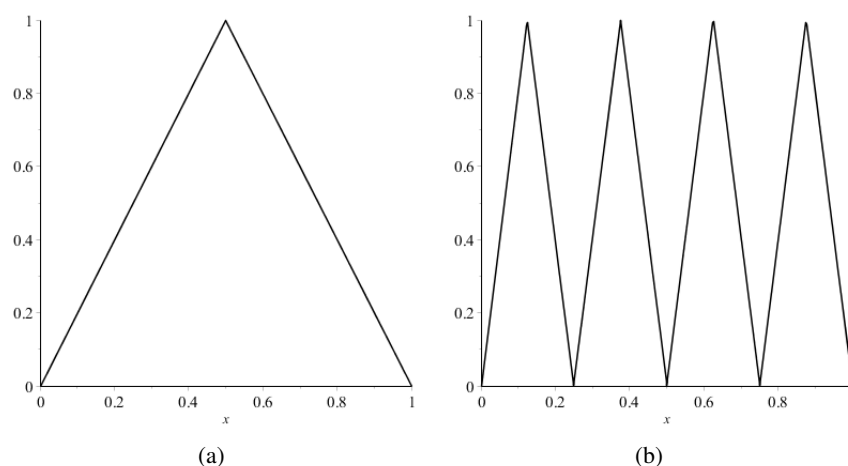
Den mest udbredte definition på kaos er dog ikke Li-Yorke-kaos, men en definition foreslået af Devaney [4]:

Def. 2. Devaney-kaos i \mathbb{R}^n . Lad $X \subset \mathbb{R}^n$ være en mængde og $F : X \rightarrow X$ en funktion. F siges at være Devaney-kaotisk hvis

1. F er topologisk transitiv, d.v.s. at der for alle åbne mængder $U, V \subset X$ findes et $n > 0$ sådan at $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
2. De periodiske punkter for F er tætte i X .
3. F er følsom overfor startbetingelser, d.v.s. at der eksisterer et $\delta > 0$ sådan at der for alle $x \in X$ og alle åbne mængder $U \subset X$ omkring x gælder, at der findes et $y \in U$ og et $n > 0$ sådan at $|F^n(x) - F^n(y)| > \delta$.

Det er senere blevet vist at følsomhed overfor startbetingelser (3) følger direkte af den topologiske transitivitet (1) og tætheden af periodiske punkter (2) i de tilfælde, hvor X har uendelig mange elementer [5]. Desuden er det blevet vist, at tætheden af periodiske punkter følger af transitivitet, når X er et interval [6].

Det viser sig, at den logistiske afbildning $F(x) = 4x(1-x)$ fra tidligere også er Devaney-kaotisk. Dette kan vises ved at eftervise transitivitet, som altså på et interval har kaos som konsekvens



Figur 3: **(a)** Graf for $H(x)$. **(b)** Graf for $H^3(x)$.

j.f. ovenstående bemærkning. En typisk måde at gøre dette på (se f.eks. [7] eller [8]) er at se på funktionen $H : I \rightarrow I, I = [0, 1]$ givet ved

$$H(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2 - 2x & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

i stedet. H har, som funktion der beskriver et dynamisk system, præcis de samme egenskaber som F , da de to funktioner er hinandens *konjugerede*, d.v.s. at de opfylder relationen $H = \phi^{-1} \circ F \circ \phi$, hvor ϕ er en homeomorfi (i dette tilfælde $\phi = (\pi/2) \arcsin(\sqrt{x})$). Det er klart, at en sådan konjugation bevarer de vigtige egenskaber for et dynamisk system, eftersom $H^n = \phi^{-1} \circ F^n \circ \phi$. Der er f.eks. en én-til-én korrespondance mellem de periodiske punkter for H og F , da $H^n(p) = p \Leftrightarrow F^n(\phi(p)) = \phi(p)$. Specielt er også kaos invariant overfor konjugering.

Grunden til, at H er lettere at arbejde med end F er, at iterationerne H^n har en simpel form. Som det kan ses på figur 3 afbilder H intervallerne $I_{1,1} = [0, 0.5]$ og $I_{1,2} = [0.5, 1]$ lineært på intervallet I . Dette vil sige, at grafen for H^2 vil være to kopier af grafen for H , og ligeledes vil grafen for H^{n+1} være to kopier af grafen for H^n . For $n > 0$ vil H^n da afbillede intervallerne $I_{n,j} = [(j-1)/2^n, j/2^n]$, $1 \leq j \leq 2^n$ på hele I . For et vilkårligt åbent interval $U \subset I$ kan man altså finde $N, J > 0$ sådan at $I_{N,J} \subset U$ (hvis $U = (a, b)$ vælg f.eks. først N sådan at $1/2^N < 2|b-a|$ og dernæst J sådan at $a < (j-1)/2^N < j/2^N < b$). Dermed er $H^N(U) = I$. Dette viser specielt at $H^N(U) \cap V \neq \emptyset$ for alle åbne mængder $V \subset I$, altså er H transitiv og dermed kaotisk i Devaneys forstand. Men da H og F er konjugerede betyder dette også, at F er Devaney-kaotisk.

Som det kan anes ud fra ovenstående eksempel, kan det være ret besværligt at eftervise Devaney-kaos formelt, når systemet bliver mere kompliceret, men det bliver praktisk umuligt, hvis man ikke kender den underliggende funktion, som beskriver systemet. Dette er f.eks. tilfældet, når man laver en måleserie, og vil finde ud af, om de underliggende mekanikker er kaotiske eller stokastiske (hvilket kan se meget ens ud).

Af disse grunde kan det være nødvendigt at arbejde med følgende, lidt svagere definition af Devaney-kaos, som foreslået af K. Hirata og Y. Aihara [9]:

Def. 3. r -kaos i \mathbb{R}^n . Lad $X \subset \mathbb{R}^n$ være en mængde og $F : X \rightarrow X$ en funktion. Givet en måleserie $\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset X$, hvor $F(x_i) = x_{i+1}$ og $F(x_N) = \emptyset$, og givet et $r > 0$, definer $U_i = \{x \in X \mid \|x_j - x_i\| < r\}$. F siges da at være r -kaotisk hvis

1. F er r -transitiv, d.v.s. at der for alle åbne mængder $U_i, U_j \subset X$ findes et $n > 0$ sådan at $F^n(U_i) \cap U_j \neq \emptyset$.
2. De periodiske punkter for F er r -tætte i X , d.v.s. at der for alle U_i kan findes et periodisk punkt $p_i \in U_i$.
3. F er r -følsom overfor startbetingelser, d.v.s. at der for alle $U_i, i = 1, \dots, N$ eksisterer et $y_i \in U_i$ sådan at $\|F^n(x_i) - F^n(y_i)\| \geq r$ for et $n > 0$.

Som det kan ses, minder denne definition meget om om Devaneys definition, den eneste forskel er blot, at de tilfældige, åbne mængder U og V fra Devaneys definition er blevet udtyndet til åbne mængder defineret over måleserien.

Det er værd at bemærke, at Devaney-kaos medfører r -kaos, hvilket altså gør r -kaos til en svagere definition af kaos, men som vi skal se senere, også en mere anvendelig én i visse tilfælde, da man kun ser på åbne mængder med en vis størrelse.

Lyapunov-eksponenter

Lyapunov-eksponenter (opkaldt efter A. Lyapunov (1857–1918)) er blevet foreslået som mål for, hvor kaotisk et system er. De er kvantificeringer af den gennemsnitlige, eksponentielle vækstrate af afstanden mellem to tætliggende baner, og beskriver, hvor følsomt et system er overfor startbetingelser. Det fantastiske ved disse eksponenter er, at det er blevet vist (se Oseledets sætning, [13]), at de stort set er uafhængige af, hvilke baner man kigger på, og dermed kan bruges som et globalt mål for ustabilitet i hele systemet. Den største Lyapunov-eksponent for et kaotisk system vil da altid være positiv, og derfor er det ikke unormalt, at man bruger en positiv største Lyapunov-eksponent som en indikator for, at systemet er kaotisk.

Men lad os starte fra begyndelsen. Vi ønsker først og fremmest et mål for, hvor hurtigt to baner, der starter tæt på hinanden, fjerner sig fra hinanden. Lad da $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ være en starttilstand i systemet givet ved en differentiabel funktion $F : X \rightarrow X$ og vælg en tætliggende starttilstand $y_0 = x_0 + \epsilon \in X$. I et kaotisk system vil man da forvente, at de to baner $O(x_0)$ og $O(y_0)$ vil fjerne sig fra hinanden eksponentielt hurtigt. Vi vil da gerne finde et tal $\lambda \in \mathbb{R}$ sådan at

$$\|x_n - y_n\| = e^{\lambda n} \|x_0 - y_0\|$$

for små n , hvor λ er den maksimale Lyapunov-eksponent. Vi definerer da den maksimale Lyapunov-eksponent således:

Definer først $J_n = DF(x_n) = DF^n(x_0)$, d.v.s. J_n er Jacobi-matricen for funktionen F^n i x_0 . Jacobi-matricerne langs banen indeholder information om, i hvilke retninger, og hvor meget baner tæt

på vil bevæge sig væk fra banen. For hver J_n er vi da interesseret størrelsen på den maksimale vækstretning under J_n , som er givet ved spektralradien $\rho_n = \{|\lambda| \mid \lambda \text{ er egen værdi for } J_n\}$. Tager man grænsen

$$L_{max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_n},$$

som eksisterer som konsekvens af den tidligere nævnte Oseledets sætning [13], fås Lyapunov-tallet L_{max} og da defineres den maksimale Lyapunov-eksponent ved

$$\Lambda_{max} = \ln(L_{max}).$$

Specielt gælder, at den maksimale Lyapunov-eksponent for en differentiabel funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (som faktisk så er den eneste Lyapunov-eksponent, siden systemet kun har en enkelt dimension) er givet ved

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\left| \frac{d}{dx} F^n(x_0) \right|^{1/n} \right).$$

Det er vigtigt at bemærke, at den maksimale Lyapunov-eksponent, som den er defineret her, afhænger af, hvilken starttilstand x_0 man kigger på. Vi ved f. eks. at der altid vil være en del periodiske punkter i et kaotisk system, og hvis man udregner den maksimale Lyapunov-eksponent herudfra, så bliver den en anden, end hvis man udregner den for en aperiodisk bane. Som allerede nævnt er denne afhængighed dog begrænset, da en konsekvens af Oseledets sætning er, at der er sandsynlighed 0 for at vælge et af de punkter, hvor Lyapunov-eksponenten afviger.

I figur 4 ses et eksempel på et estimat af Λ for den logistiske funktion $ax(1-x)$ med $a = 4$, som vi nu har set flere gange er kaotisk. Dette estimat er lavet ved at benytte kædereglen til at skrive Λ som

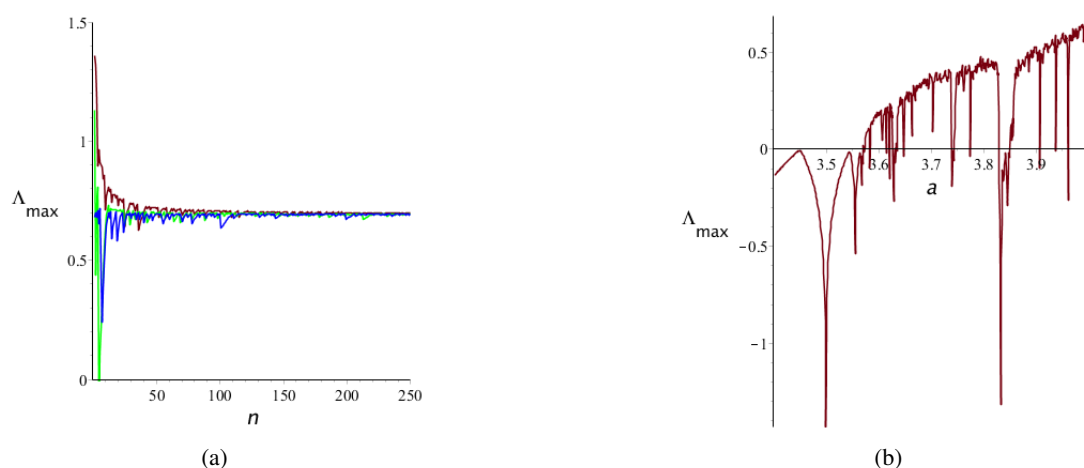
$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |F'(x_i)| \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \ln |F'(x_i)|,$$

for et tilstrækkeligt stort N . I figur 4a er Λ estimeret ved at beregne de første n , $0 < n < 300$ iterationer af funktionen i et tilfældigt punkt, evaluere den afledte $a - 2ax$ i alle iterationspunkterne og tage gennemsnittet af deres logaritmer. I figur 4b er Λ beregnet som funktion af parameteren a i den logistiske model, for at give os et overblik over, for hvilke værdier af a systemet er kaotisk (sammenlign gerne med bifurkationsdiagrammet fig. 1b).

Kaos i måleserier

Når man undersøger fysiske systemer, så gør man det tit ved at lave en række målinger af en fysisk størrelse, som ændrer sig over tid. En sådan samling af målinger kaldes en måleserie, og den kan opfattes som del af en bane i et underliggende dynamisk system. Man kan da forsøge at analysere måleserien som bane, og bruge dette til at sige noget om det system, som har frembragt serien.

Det kan dog til tider være svært at afgøre, om kompleksiteten af de målinger man har lavet stammer fra et deterministisk system. Man kan derfor lave en række tests på måleserien for at



Figur 4: **(a)** Estimer af den største Lyapunov eksponent for funktionen $4x(1-x)$, plottet mod antallet af beregnede iterationer n . Der er lavet tre estimer ud fra tre tilfældige startpositioner, og det ses, at Lyapunov-eksponenten er uafhængig af, hvilken startposition vælges. **(b)** Estimer af Lyapunov-eksponenten for $ax(1-x)$, $a \in [3.4, 4]$. Sammenlign evt. med bifurkationsdiagrammet fig. 1b.

bedømme, om det underliggende system er deterministisk kaotisk eller stokastisk. Hertil har man udviklet et væld af redskaber, hvoraf vi vil præsentere et par.

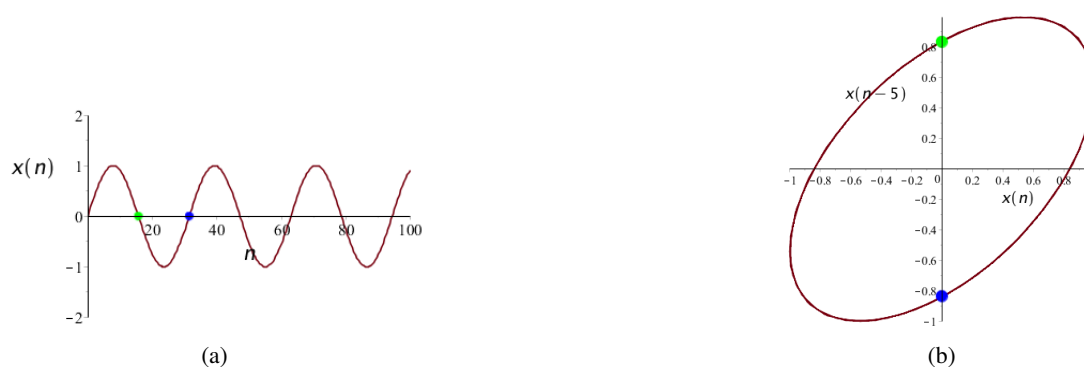
Indlejring i højere dimensioner

Når man vil analysere en måleserie, så kommer man for det meste ikke udenom at skulle beregne de indbyrdes afstande mellem punkter i måleserien, f.eks. når man skal udregne Lyapunov-eksponenter. Det er derfor vigtigt at beslutte sig for, hvor mange dimensioner man tror det underliggende faserum har, da forskellige valg giver forskellige afstande. Antag f.eks. at man har et system i fem dimensioner, men kun kan måle den første af dem. Spørgsmålet er da, hvordan man bedst muligt kan genskabe det oprindelige faserum, kun ved hjælp af information fra en måleserie. Denne problemstilling består af to delproblemstillinger, nemlig hvilken dimension det bagvedliggende faserum har og hvordan man kan indlejre måleserien i dette faserum. Som svar på den sidste problemstilling er der udviklet et effektivt redskab, nemlig den såkaldte "delay"-indlejring, der fungerer således:

Givet en måleserie $\{x(1), x(2), \dots, x(N)\}$ vælges først en delay-tid τ og en indlejningsdimension d_E . Da indlejres måleserien i det d_E -dimensionale faserum som en måleserie $\{X(M), \dots, X(N)\}$ med $M = 1 + \tau d_E$ ved indlejringen

$$X(n) = (x(n), x(n-\tau), x(n-2\tau), \dots, x(n-(d_E-1)\tau))$$

[12]. Denne indlejring muliggør at differentiere mellem målepunkter, ved at se på deres fortid, og dermed genskabe noget af strukturen i det oprindelige system.



Figur 5: Den endimensionale måleserie fra **(a)** indlejres i to dimensioner ved delayindlejring som vist i **(b)**. Bemærk, hvordan afstanden mellem $x(16)$ og $x(32)$ (h.h.v. det grønne og blå punkt) i **(a)** er 0, men i **(b)** er omkring 1.7.

Spørgsmålet er så, hvordan man vælger delay-tiden og indlejningsdimensionen, sådan at man genskaber strukturen i systemet. Dette er imidlertid let nok for delay-tiden, da denne ikke har indflydelse på den topologiske beskaffenhed af den indlejrede måleserie, men kun på størrelsesforholdene. Man skal dog passe lidt på, hvis der er periodicitet i måleserien, ikke at vælge delay-tiden synkront med denne. M.h.t. indlejningsdimensionen er der flere forskellige forslag til, hvad man kan gøre for at finde den rigtige, hvoraf en af de mest udbredte er “false-neighbor”-metoden, som udviklet af Kennel et al. [12]. Denne forklares bedst ved et eksempel:

Antag at en given måleserie følger en sinussvingning som vist i figur 5a. Vi har da, at de to målinger $x(16)$ og $x(32)$ begge er lig 0, men at måleserien udvikler sig forskelligt h.h.v. efter det ene og efter det andet målepunkt ($x(n) > 0$ kort efter $n = 16$ i modsætning til $x(n) < 0$ kort efter $n = 32$). Hvis vi da laver en delay-indlejring i to dimensioner som vist i figur 5b, ser vi da, at $X(16) \neq X(32)$, og vi kan altså skelne mellem de to punkter.

Denne strategi — at lede efter punkter, som ligger tæt på hinanden i en dimension d men som pludselig ligger langt fra hinanden i indlejningsdimensionen $d + 1$ — bliver også benyttet i false-neighbor-metoden (hvilket altså forklarer navnet). Man tager da et målepunkt $x(i) \in \mathbb{R}^d$ og måler afstanden $D_d^{(i,r)}$ til det r 'te tætteste punkt $x(i_r)$. Så indlejrer man punkterne i dimension $d + 1$ og måler afstanden $D_{d+1}^{(i,r)}$ og hvis

$$\frac{D_{d+1}^{(i,r)} - D_d^{(i,r)}}{D_d^{(i,r)}} > R,$$

for en fastlagt tærskelværdi R , så har $x(i)$ en false neighbor. Indlejningsdimensionen findes da ved at tjekke for false neighbors for hver dimension d , og den første dimension, der ikke har nogen, bruger man så som indlejningsdimension d_E . For flere detaljer og uddyende tests af metoden se [12].

Gentagelsesplot

Når man så endelig har indlejret sin måleserie i en passende dimension, kan man konstruere et meget alsidigt værktøj til at konstatere kaos i et system, nemlig de såkaldte gentagelsesplot (frit oversat fra det engelske “recurrence plot”). Et gentagelsesplot konstrueres ved at se på, hvilke af målingerne ligger tættere på hinanden end en vis afstand r . Givet en måleserie $O(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ laver man da først en $N \times N$ -matrix R , hvor

$$R_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \|x_i - x_j\| < r \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}.$$

Gentagelsesplottet fås da ved at plote punkter der, hvor R har 1-taller, altså i de punkter (n, m) hvor $R_{n,m} = 1$. Derved fås et $N \times N$ -punktplot, som kaldes et gentagelsesplot. I figur 6c ses et eksempel på et sådanne plot.

Gentagelsesplot er ekstremt alsidige i deres anvendelsesmuligheder. De er blevet relateret til en lang række størrelser, som beskriver kompleksiteten af dynamiske systemer, herunder den maksimale Lyapunov-eksponent, som vi stødte på tidligere.

En af de ting, som vi vil bruge disse plot til her, er, at undersøge, om det underliggende system er r -kaotisk (som foreslået i [9]). Husk, at for at et system skal være r -kaotisk skal det være r -transitivt, have r -tætte periodiske punkter, og være r -følsomt overfor startbetingelser. Lad os da først se, hvilken sammenhæng der er mellem gentagelsesplot og r -transitivitet:

Lad da $O(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ være en måleserie i systemet $F : X \rightarrow X$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Lad $g(i) = \min\{j \mid \|x_i - x_j\| < r\}$ og $h(i) = \max\{j \mid \|x_i - x_j\| < r\}$ (altså h.h.v. det laveste og højeste indeks j sådan at $R_{i,j} = 1$). Da er F r -transitiv hvis $\max\{g(i) \mid 1 \leq i \leq N\} < \min\{h(i) \mid 1 \leq i \leq N\}$, hvilket er hurtigt vist:

Antag at $\max\{g(i) \mid 1 \leq i \leq N\} < \min\{h(i) \mid 1 \leq i \leq N\}$ og tag to mængder U_i, U_j , som defineret i def. 3. Hvis $i < j$ gælder, at $F^{j-i}(x_i) = x_j$ og dermed $F^{j-i}(U_i) \cap U_j \neq \emptyset$, eftersom $x_i \in U_i$ og $x_j \in U_j$. Hvis vi på den anden side har, at $j \leq i$, så er $x_{g(i)} \in U_i$ og pr. antagelse videre at $g(i) < h(j)$. Da gælder, at $F^{h(j)-g(i)}(x_{g(i)}) = x_{h(j)}$ og altså at $F^{h(j)-g(i)}(U_i) \cap U_j \neq \emptyset$, eftersom $x_{g(i)} \in U_i$ og $x_{h(j)} \in U_j$, hvilket viser, at F er r -transitiv.

Antag omvendt, at der findes et par af indekser $j \leq i$ sådan at $h(j) \leq g(i)$. Da er $F^n(x_{g(i)}) \notin U_j$ for $0 \leq n \leq N - g(i)$ og da også $F^n(x_k) \notin U_j$ for $x_k \in U_i$ og $0 \leq n \leq N - k$, da $g(i)$ er det mindste indeks sådan at $x_{g(i)} \in U_i$. Altså er $F^n(U_i) \cap U_j = \emptyset$ for $0 \leq n \leq N$, og dermed er F ikke r -transitiv [9].

Udover den topologiske r -transitivitet kan man også identificere ustabile periodiske baner på et gentagelsesplot ved at kigge efter kortere eller længere diagonale linjer i plottet. De diagonale linjer viser, at den bane, som måleserien udgør, besøger samme område flere gange, hvilket tyder på en ustabil periodisk bane i nærheden (se f.eks. [10] for detaljer). Besøger måleserien et område igen efter k tidsenheder, så tyder det da på, at der er en periodisk bane i området med periode k , og man kan teste for disse ustabile periodiske baner ved at undersøge, om linjestykker parallelle med diagonalen optræder signifikant oftere end forventet.

Lad da først $\tau(k)$ benævne hyppigheden af punkter i diagonalen $(i, i+k)$, $i = 1, \dots, N-k$ i gentagelsesplottet, d.v.s.

$$\tau(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} R_{i,i+k}.$$

Lad os da betragte antallet af skift n_k i diagonalen $(i, i+k)$, som mål for hyppigheden af linjestykker i diagonalen. n_k er da givet ved

$$n_k = \sum_{i=1}^{N-1} |R_{i,i+k} - R_{i+1,i+k+1}|.$$

Under den antagelse, at $R_{i,i+k} \sim B(1, \tau(k))$, kan forventes at $n_k \sim B(2\tau(k)(1-\tau(k)), N-k-1)$, hvis skiftene er uafhængige af hinanden. For N tilstrækkelig stor giver den centrale grænseværdisætning os, at n_k omtrent er normalfordelt med middelværdi $2(N-k-1)\tau(k)(1-\tau(k))$ og varians $2(N-k-1)\tau(k)(1-\tau(k))(1-2\tau(k)(1-\tau(k)))$. Vi betragter da den $(0, 1)$ -normalfordelte variabel

$$z_k = \frac{n_k - 2(N-k-1)\tau(k)(1-\tau(k))}{2(N-k-1)\tau(k)(1-\tau(k))(1-2\tau(k)(1-\tau(k)))}$$

som grundlag for vores test. Beregnes z_k i det konkrete tilfælde, siger vi da, at systemet har mindst en periodisk bane med periode k hvis $P(x \leq z_k) < 0.05$, i hvilket tilfælde $I_k = \{i \in \{1, \dots, N-k\} \mid R_{i,i+k} = 1\} \cup \{i+k \in \{N-k, \dots, N\} \mid R_{i+k,i} = 1\}$ er indekserne af de U_i , der indeholder et af disse periodiske punkter. Hvis vi da har, at $\bigcup_{k=1}^{N-1} I_k = \{1, \dots, N\}$, så har F har r -tætte periodiske punkter hvis der gælder [9].

Som sidste forudsætning for r -kaos mangler blot r -følsomhed overfor startbetingelser. r -følsomhed kan genkendes i et gentagelsesplot ved at se på diagonalerne $(i, i+k)$, $1 \leq k \leq N$. Hvis enhver af disse har mindst ét hul, så kan det underliggende system forventes at være r -følsomt overfor startbetingelser. Dette er fordi, at afstanden mellem to baner, som tæt på hinanden i starten af måleserien, vil vokse til en afstand større end r , hvilket altså *indikerer* r -følsomhed overfor startbetingelser. Vi vil imidlertid teste for r -følsomhed ved at betragte mængderne $\{i \mid \sum_{a=-2}^2 R_{i,i+k+a} = 0\}$ for $2 \leq k \leq N/2$. Hvis ingen af disse er tomme, siger vi at det underliggende system er r -følsomt overfor startbetingelser.

Der findes altså tre tests, som man kan udføre på et gentagelsesplot for at finde ud af, om det underliggende system er r -kaotisk; Hvis udfaldene af alle tre test er positive, kan systemet forventes at være r -kaotisk. Det er dog sandsynligvis allerede gået op for læseren, at disse tests ikke viser r -kaos i et system formelt, men kun sandsynliggør det (f. eks. ved hjælp af statistiske metoder), hvilket altså er hvor vi bevæger os fra matematikken over i fysikken og biologien.

Der er en vigtig bemærkning med hensyn til gentagelsesplot, nemlig valget af tærskelværdien r , som man jo for så vidt kan vælge frit. Hvad r i sidste ende bestemmer, er opløsningen af plottene, og der er et par forskellige måder at bestemme en passende værdi af r . En effektiv og simpel formel er $r = \text{diam}(O(x_1)) \cdot 10\%$, d.v.s. 10% af den største afstand mellem målinger i måleserien. En uddybende forklaring herpå og meget mere om gentagelsesplot generelt kan findes i [11].

For at vi kan stole på vores kaos-diagnoser via gentagelsesplot, er det selvfølgelig nødvendigt at teste metoden på et par eksempler for at se, hvordan de klarer sig. Lad os da først se på en på en periodisk måleserie med støj:

$$x_n = \sin(0.1n + X), X \sim \mathcal{U}(-0.1, 0.1).$$

Et eksempel på et gentagelsesplot fra sådan en måleserie er vist i figur 6a. Ud af 10 forskellige målserier med 250 gentagelser og de tilhørende gentagelsesplot var alle r -transitive, alle havde r -tætte periodiske punkter og ingen havde r -følsomhed overfor startbetingelser, hvilket altså vil sige, at vores tests afslørede måleserierne som ikke kaotiske i alle 10 tilfælde.

Som et andet eksempel betragtes en måleserie genereret af en regressiv random walk:

$$x_n = 0.1 \cdot x_{n-1} + Y, Y \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

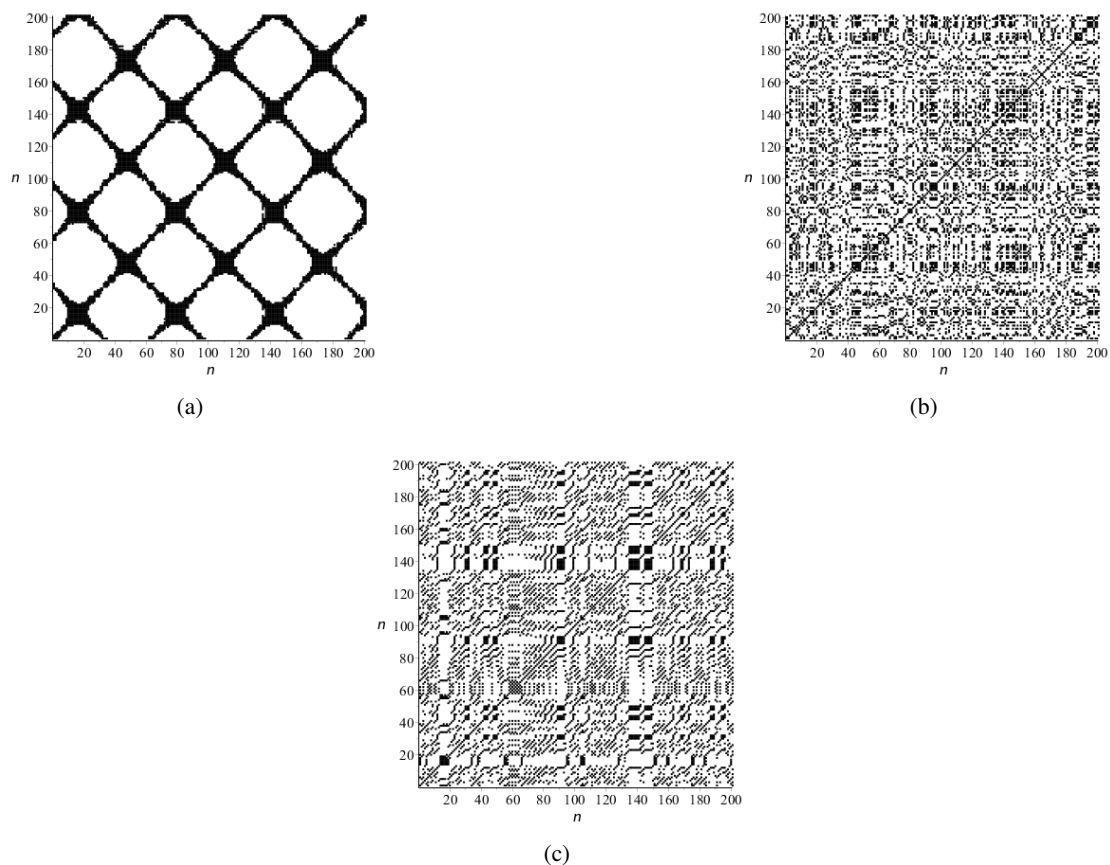
Ud af 10 forskellige målserier med 250 gentagelser og de tilhørende gentagelsesplot (se fig. 6b for et af dem) var ét r -transitivt, ingen havde r -tætte periodiske punkter og alle havde r -følsomhed overfor startbetingelser. Altså kan systemet, ifølge testene, korrekt diagnosticeres som ikke kaotisk i alle 10 tilfælde.

For den logistiske model med $a = 4$, som vi allerede ved er kaotisk, var 10 forskellige måleserier alle samt positive i alle tre tests, og man kan da konstatere, at systemet er kaotisk, hvilket er korrekt.

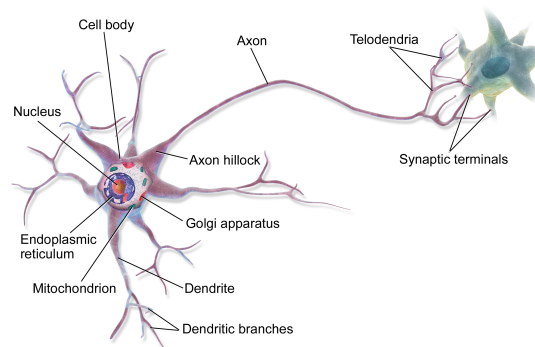
Som slutbemærkning i dette afsnit om måleserier skal nævnes, at en ofte anvendt metode til bestemmelse af kaos i måleserier er estimerer af den maksimale Lyapunov-eksponent, som vi har set på tidligere. Der er da en del forskellige metoder til at estimere Lyapunov-eksponenten, hvoraf de fleste dog bygger på samme princip. Den grundlæggende idé er, at lede efter punkter i måleserien, som er tætte på hinanden, og så at se, hvordan afstanden mellem dem udvikler sig i løbet af et par tidsskridt. Derefter tager man en form for gennemsnit over logaritmen af væksten af afstande mellem alle tætte punktpar, hvilket giver et estimat af den maksimale Lyapunov-eksponent. Som sagt er det her vigtigt, at man vælger indlejningsdimensionen tilstrækkelig høj, for at afstandene mellem punkterne skal være korrekte.

Kaos i biologiske neuroner

Kaosteori bliver i dag anvendt i en bred vifte af områder, som f.eks. fysik, meteorologi, eller elektroteknik. Også i biologien har man haft stor glæde af kaosteori, som blandt andet er blevet brugt til at analysere populationsmodeller (den logistiske vækst, som vi har brugt som eksempel flere gange, bliver tit brugt som populationsmodel). Et specielt spændende eksempel på anvendelsen af kaosteori indenfor biologien er opdagelsen af kaos i hjernen.



Figur 6: **(a)** Gentagelsesplot af måleserie fra et periodisk system med støj. **(b)** Måleserie genereret af en regressiv random walk. **(c)** Gentagelsesplot af måleserie fra den logistiske model med $a = 4$. I alle tre plot er r valgt som 10% af den største afstand mellem punkter i måleserien.



Figur 7: Tegning af et biologisk neuron. Kilde: [21].

Ekspimentelt eftervist kaos i neuroner

I 1950'erne blev forskere opmærksomme på, at hjernen til tider opfører sig kaotisk, hvilket har åbnet op for et væld af ny viden om, hvordan hjernen fungerer. En af de første grupper til at finde kaos i hjernen var C. Skarda & W. Freeman, der kunne konstatere, at EEG målinger fra specielle dele af hjernen udviste kaotiske træk [17]. Senere er ydermere blevet vist, at kaos ligger meget dybere i hjernen, nemlig i de enkelte neuroner.

Neuroner, også kaldet nerveceller, er de celler, som hjernen er opbygget af. De udgør de beregningsenheder, som vi bruger til at bearbejde information med. I fig. 7 ses hvordan et neuron cirka ser ud. Det er en celle, som i den ene ende har et antal dendritter, der forbinder den med de omkringliggende neuroner. Via disse dendritter modtager neuronet elektriske impulser fra de andre neuroner. Disse impulser ændrer spændingsforskellen mellem celleindre og celledre, og når denne forskel når en hvis tærskelværdi, så affyrrer neuronet selv en elektrisk impuls langs aksonet, som så sendes videre ud i andre neuroner. Det er da blevet vist, at den process at omvandle et elektrisk input til output kan være kaotisk for visse input, hvilket vi vil se nærmere på nu.

De første eksperimenter med henblik på at udforske kaos i neuroner blev udført af Matsumoto et al. i 1987 [15], som målte på blæksprutteaksoners opførsel under varierende inptut. Man bruger tit blæksprutteaksoner til eksperimenter, da de er 100 til 1000 gange større end menneskers, og derfor er en del lettere at håndtere. Eksperimentet var sat op sådan, at man sendte elektriske impulser i faste intervaller ind i den ene ende af aksonet og efterfølgende målte, hvad der kom ud af den anden. Man lavede da forskellige måleserier, hvor impuls længden blev fastholdt, amplituden og tidsafstanden mellem impulserne blev varieret. Dette resulterede i en række måleserier, hvoraf nogle var periodiske, og andre var så irregulære, at de blev kaldt kaotiske.

Senere, i 1992, blev yderligere eksperimenter udført med blæksprutteaksoner af Mees et al. [14], og denne gang blev de resulterende måleserier undersøgt lidt mere systematisk. For hver måleserie blev den største Lyapunov-eksponent beregnet ved hjælp af to forskellige algoritmer (der er mange metoder til at gøre dette, nogle mere robuste end andre, se evt. [22] for en simpel og pålidelig algoritme), og for flere af måleserierne blev den maksimale Lyapunov-eksponent

positiv. Man konkluderede da, at det var sandsynligt at aksonerne opførte sig kaotisk, men at det ikke var sikkert, da en positiv Lyapunov-eksponent ikke nødvendigvis medfører kaos.

Endeligt i 2012 blev målingerne fra 1992 taget op igen i af Hirata et al. [16], og analyseret grundigere, bl.a. ved hjælp af gentagelsesplot, som vi introducerede tidligere. Resultaterne af dette arbejde er vist i figur 8. For at eftervise, at måleserien var kaotisk, estimerede man først den maksimale Lyapunov-eksponent (ved en tredje metode formuleret af Kantz [19], se fig. 8c). Denne blev omtrent 0.42. Herefter blev systemets Kolmogorov-Sinai-entropi — et andet mål for et systems kompleksitet, som stammer fra ergode-teori og informationsteori, se [23] for detaljer — ligeså estimeret, og denne blev 0.42, hvilket igen indikerer kaos. Troværdigheden af begge estimater blev fæstet af, at de ydermere opfyldte den såkaldte Pesin's identitet mellem et systems KS-entropi h_{KS} og positive Lyapunov-eksponenter Λ_i :

$$h_{KS} \leq \sum_i \Lambda_i$$

[24]. Til sidst blev også et gentagelsesplot konstrueret af måleserien, og de ovenfor beskrevne tests for r -kaos blev udført, hvilke også alle samt var positive. Alt dette tilsammen gjorde altså, at man mente med rimelighed at kunne konkludere, at et blæksprutteneuron opfører sig kaotisk.

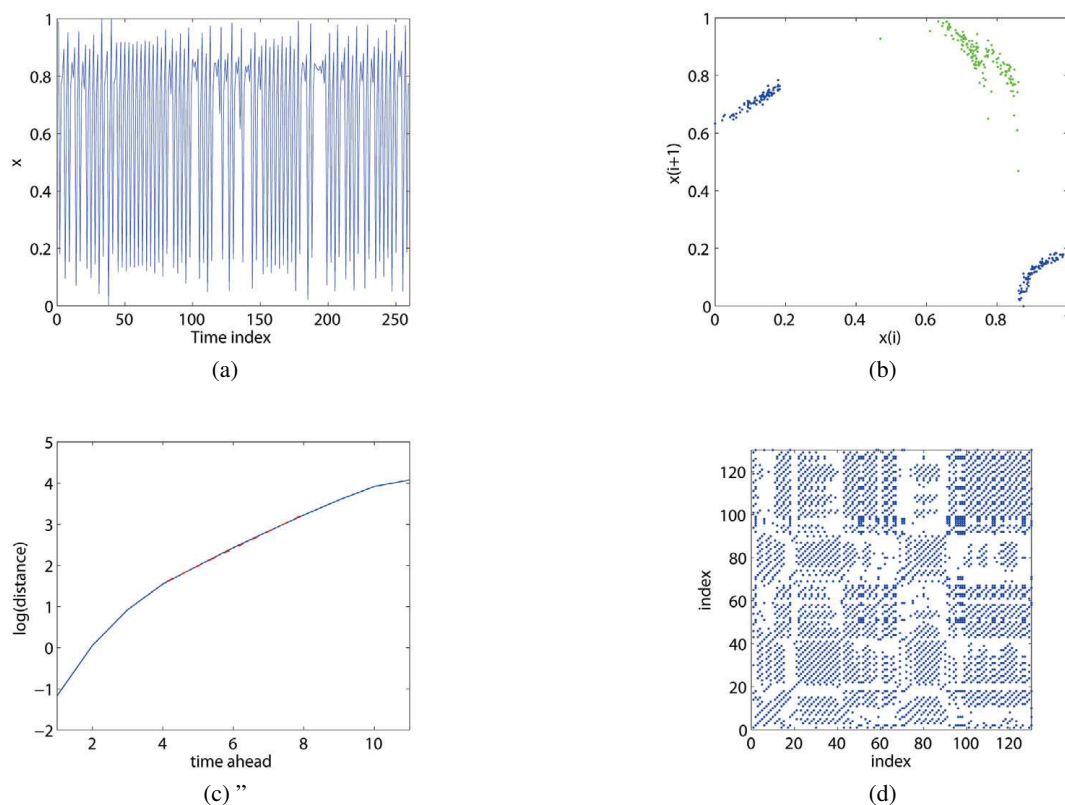
Model for et kaotisk neuron

Der findes et væld af diskrete og kontinuerte modeller for neuroner, hvoraf nogle også kan genskabe de kaotiske fænomener, som vi lige har redegjort for er blevet observeret. Et af de mest prominente eksempler er den såkaldte Hodgkin-Huxley-model fra 1952, som var en af de første modeller, der blev udviklet. Modellen bygger på en forståelse af de elektrisk-fysiologisk mekanismer, der sender de elektriske signaler langs aksonet, og er kontinuert i fire dimensioner. Denne model er dog meget kompleks, og derfor svær at lave beregninger ud fra, og man har da prøvet at udvikle simple, diskrete modeller, hvoraf vi vil kigge på en helt bestemt, nemlig Aihara-modellen (A-modellen), som foreslået af Aihara et al. i [20].

A-modellen bygger, modsat Hodgkin-Huxley-modellen, på en kunstig neuronmodel som anvendes i kunstige neurale netværk (d.v.s. en struktur af små beregningsenheder, der bliver anvendt til kunstig intelligens og maskine-læring). Denne kunstige neuronmodel er inspireret af et biologisk neuron, men bruges som et redskab indenfor datalogien, og er altså ikke optimeret som biologisk model [20, 25].

Et neuron er intuitivt en enhed, der får en række input, og når disse input overskrider en vis tærskelværdi, så affyrer neuronet et alt-eller-intet signal. Et typisk, kunstigt neuron prøver da at følge denne intuition. Lad da x_k være neuroner, som som kan antage to værdier, 0 og 1, svarende til hvilende og affyrende. Man kan konstruere et netværk af n sådanne neuroner ved at lade $x_k(t)$ betegne det k 'te neurons tilstand til den diskrete tid t , og lade $x_k(t+1)$ være givet ved

$$x_k(t+1) = \phi \left(\sum_{i=1}^n (w_{i,k} x_i) - \theta_i \right),$$



Figur 8: **(a)** Måleserie fra et blæksprutteakson. Oprindelig figurtekst: “Time series of squid giant axon.” **(b)** Indlejring af måleserie i to dimensioner. Oprindelig figurtekst: “Return plot of the dataset. In this figure, the colours show the estimated generating partition.” (OBS: En generating partition er noget man skal bruge for at estimere Kolmogorv-Sinai-entropien). **(c)** Plot over den gennemsnitlige vækst i afstande mellem tætliggende punkter i måleserien. Den maksimale Lyapunov-eksponent kan aflæses som hældningen på den lineære approximation af kurven. Oprindelig figurtekst: “Maximal Lyapunov exponent estimated by the method of Kantz.” (se [19] for detaljer hertil). **(d)** Gentagelsesplot over del af måleserien. Tærskelværdien r bliver ikke specificeret. Oprindelig figurtekst “Recurrence plot of squid giant axon.” Alle figurer er, som fundet i artiklen [16].

hvor ϕ er Heaviside-funktionen, $w_{i,j}$ betegner vægtningen af forbindelsen mellem neuronerne i og j (så hvis f.eks. to neuroner x_i og x_j ikke er forbundet med hinanden, så er $w_{i,j} = w_{j,i} = 0$), og hvor θ_i betegner grænseværdien for, hvornår det i 'te neuron aktiveres. Et enkelt neuron er da givet ved funktionen

$$x(t+1) = \phi(wx(t) - \theta),$$

hvor w angiver vægtningen af neuronets "forbindelse" til sig selv.

Denne model kan udvides en smule ved ikke bare at tage den forrige tilstand $x(t)$ i betragtning, når man skal udregne tilstanden $x(t+1)$, men også alle tidligere tilstande $x(t-r)$, $0 < r < t$ af neuronet. Hvis man desuden en tilføjer en inputfunktion $A : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, der skal symbolisere et kunstigt input udefra, så får man et såkaldt Nagumo-Sato-neuron (NS-neuron) [26] som er givet ved

$$x(t+1) = \phi\left(A(t) - \sum_{r=1}^t w^{(r)} x(t-r) - \theta\right).$$

Vi vil i det følgende antage, at den indflydelse, som tidligere tilstande har på den aktuelle tilstand er eksponentielt aftagende og selvhæmmende, hvilket vil sig at $w^{(r)} = -\alpha k^r$ for to konstanter $\alpha > 0$ og $k \in (0, 1)$. Desuden antages $A(t)$ at være midlertidigt konstant, hvilket skal modellere de eksperimenter, som vi lige har beskrevet. For at forenkle ligning for NS-neuronet, kan den deles op som en ydre og indre variabel:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= A(t) - \sum_{r=1}^t \alpha k^r x(t-r) - \theta \\ x(t+1) &= \phi(y(t+1)), \end{aligned}$$

hvor $y(t+1)$ kan skrives som funktion af $y(t)$ ved

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha\phi(y(t)) + a,$$

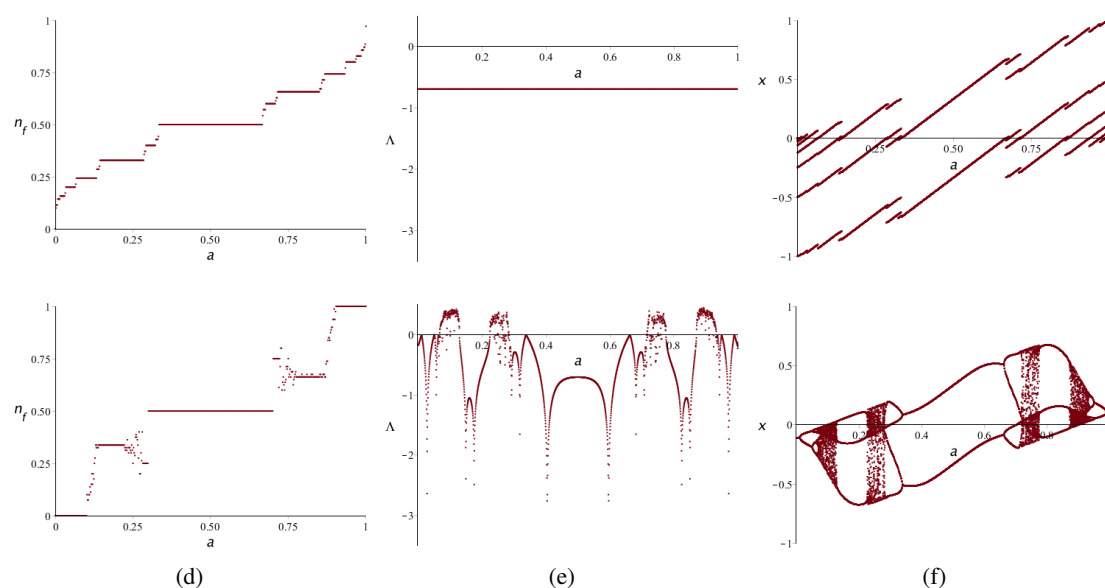
hvor $a = (A - 1)(k - 1)$ [20].

NS-neuroner er blevet brugt som biologiske neuronmodeller tidligere, men de er ikke kaotiske, hvilket er et problem, hvis man vil modellere de kaotiske aspekter ved blæksprutteneuronet. For at se, at NS-neuronet ikke er kaotisk, kan vi f.eks. regne Lyapunov-eksponenten ud for systemet $F(x) = kx - \alpha\phi(x) + a$. Denne kan vi finde analytisk direkte fra definitionen, eftersom $F'(x) = k$ for $x \neq 0$ (man kan se bort fra $x = 0$, da enhver bane, hvor $y(t)$ bliver 0, bliver asymptotisk periodisk, og derfor har negativ Lyapunov-eksponent). Lyapunov-eksponenten bliver da

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln |F'(x_n)|^{1/n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(0.5^{1/n} \right) \right) < 0.$$

Altså er alle baner asymptotisk periodiske eller stationære, og neuronet er derfor ikke kaotisk.

Derfor har Aihara et al. foreslået et nyt, kaotisk neuron i [20], som fås ved at erstatte den klassiske alt-eller-intet affyringsmekanisme, repræsenteret af den diskontinuerte funktion ϕ , med et



Figur 9: Sammenligning af NS-neuronet (øverste række) og A-neuronet (nederste række). **(a)** Gennemsnitlig affyringsfrekvens som funktion af inputparameteren a . Bemærk, at vi siger, at A-neuronet affyrer en impuls hvis $x(t) > 0.5$. **(b)** Estimat af den maksimale Lyapunov-eksponent som funktion af inputparameteren a . **(c)** Bifurkationsdiagram med inputparameteren a som bifurkationsparameter. Bemærk, hvordan kaos i de nederste diagrammer forekommer i fire “vinduer”.

kontinuert signal givet ved en sigmoidfunktion, som f.eks. $f(x) = 1/(1 + e^{-x/0.04})$ (det viser sig, at det ikke gør den store forskel hvilken sigmoidfunktion man vælger specifikt, se [20]). Dette vil altså sige, at A-neuronet er givet ved ligningerne

$$\begin{aligned} y(t+1) &= ky(t) - \alpha f(y(t)) + a \\ x(t+1) &= f(y(t+1)). \end{aligned}$$

I fig. 9 har vi sammenlignet NS-neuronet og A-neuronet, for at give et indtryk af den kvalitative forskel, som erstatningen af ϕ med f gør. Vi har da her sammenlignet, hvordan neuronerne reagerer på forskellige inputstyrker a ved at udregne affyringsfrekvens, Lyapunov-eksponent og bifurkationsdiagrammer for begge neuroner med $k = 0.5$ og $\alpha = 1$ faste.

Hvis vi først betragter de estimerede Lyapunov-eksponenter som funktion af a i fig. 9e, så kan man klart se, at NS-neuronet har en negativ, konstant Lyapunov-eksponent, som allerede blev vist tidligere, og dermed ikke er kaotisk. For A-neuronet varierer Lyapunov-eksponenterne dog mellem $1/2$ og -3 , og vi kan observere 4 kaotiske vinduer, hvor eksponenten er positiv. Sammenlignes dette med bifurkationsdiagrammet for A-neuronet i fig. 9f, kan samme 4 vinduer klart genkendes som kaotiske.

For at cementere, at systemet virkelig *er* kaotisk, kan man f.eks. udføre gentagelsesplot-testene, som vi har set på tidligere. For hver af parameterværdierne $a = 0.095, 0.12, 0.23$ var testene da

positive i 10 ud af 10 tilfælde, mens alle 10 tests var negative for $a = 0.45$. Dette viser altså, som forventet, at funktionen er kaotisk i $a = 0.095, 0.12, 0.23$, men ikke i $a = 0.45$ (sammenlign med fig. 9f).

For en lidt dybere forståelse af de fænomener, som vi kan observere i bifurkationsdiagrammet fig. 9f, kan man starte med at se på de stationære punkter og deres stabilitet. Disse er løsningerne til ligningen

$$-0.5y + a = f(y) = \frac{1}{1 + e^{-x/0.04}}.$$

Løsningerne til denne ligning kan findes som skæringspunktet mellem graferne for funktionerne i fig. 10, og det ses, at der netop er én løsning $t_{s,a}$ for hvert a , hvilket altså vil sige netop ét stationært punkt for alle a . M.h.t. stabiliteten af det stationære punkt gælder, at

$$\begin{aligned} |y'(t_{s,a})| &= |0.5 - f'(t_{s,a})| > 1 \\ \Leftrightarrow t_{s,a} &\in (-0.107\dots, 0.107\dots) \\ \Leftrightarrow a &\in (0.010\dots, 0.989\dots). \end{aligned}$$

Dette vil altså sige, at $t_{a,s}$ er frastødende for stort set alle værdier af a , og kun stabilt for a tæt på 0 og 1. Bemærk at dette kan genkendes i bifurkationsdiagrammet, hvor stabile fikspunkter kan observeres i begge ender.

En anden ting, som man kan kigge efter, er, om funktionen har et såkaldt invariant interval $[a, b]$ for hvilket gælder, at $y([a, b]) = [a, b]$. Afhængigt af, hvordan a og b ligger i forhold til det lokale maksimum i $c_1 \approx -0.154\dots$ og det lokale minimum $c_2 = 0.154\dots$ (c_1 og c_2 er uafhængige af a), er der forskellige muligheder for invariante intervaller:

Et interval $[a, b]$ er invariant under y hvis

1. $[a, b] = [y(c_2), y(c_1)]$ og $y(c_2) < c_1 < c_2 < y(c_1)$, eller
2. (a) $[a, b] = [y^2(c_1), y(c_1)]$ og $y(c_2) < c_1 < y(c_1) \leq c_2$ eller (b) $[a, b] = [y^2(c_1), y(c_1)]$ og $c_1 \leq y(c_2) < c_2 < y(c_1)$, eller
3. $[a, b] = [c, y(c)]$ og $c_1 \leq y(c_2) < y(c_1) \leq c_2$ for et 2-periodisk punkt $c \in [c_1, c_2]$.

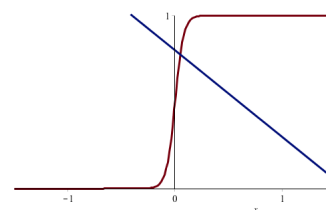
Bevis: " \Rightarrow " : Antag at $[a, b]$ er invariant og først at $c_1, c_2 \in (a, b)$. Da gælder, at

$$y([a, b]) = [\min\{y(a), y(c_2)\}, \max\{y(b), y(c_1)\}],$$

eftersom c_1 og c_2 er lokale ekstrema. Altså er $a = y(a)$ eller $a = y(c_2)$. $a = y(a)$ er imidlertid ikke en mulighed, da a i så fald ville være et fikspunkt og vi lige har set at det eneste fikspunkt ligger mellem c_1 og c_2 . Altså må a nødvendigvis være $y(c_2)$ og lignende må b være $y(c_1)$.

Antag dernæst, at $c_1 \in (a, b)$ og $c_2 \in [b, \infty)$ (tilfældet $c_2 \in (a, b)$ og $c_1 \in (\infty, a]$ er analogt p.g.a. symmetri). Da gælder

$$y([a, b]) = [\min\{y(a), y(b)\}, y(c_1)],$$



Figur 10

og ved brug af samme argument som ovenfor må vi have, at $[a, b] = [y^2(c_1), y(c_1)]$.

Antag til slut, at $c_1 \in (\infty, a]$ og $c_2 \in [b, \infty)$. Da gælder

$$y([a, b]) = [y(b), y(a)]$$

og dermed er invariant kun hvis $a = y(b)$ og $b = y(a)$, d.v.s. at a (og b) udgør en 2-periodisk bane.

” \Leftarrow ”: Følger trivielt fra antagelserne.



Så vi har altså tre forskellige typer af invariante intervaller, alt afhængig af, hvordan interaktionerne af c_1 og c_2 opfører sig, hvilket igen afhænger af inputparameteren a . Vi er da i tilfælde (1) når $a \in (0.252\dots, 0.747\dots)$, i tilfælde (2a) h.h.v (2b) når $a \in (0.027\dots, 0.252\dots]$ h.h.v. $a \in [0.747\dots, 0.972\dots]$ og i tilfælde (3) når $a \in (0, 0.027\dots]$ eller $a \in [0.747\dots, 1]$. Det er værd at bemærke, at det invariante interval faktisk kollapser til det stationære punkt $t_{s,a}$, som vi fandt tidligere, når $a < 0.010\dots$ eller $a > 0.989$.

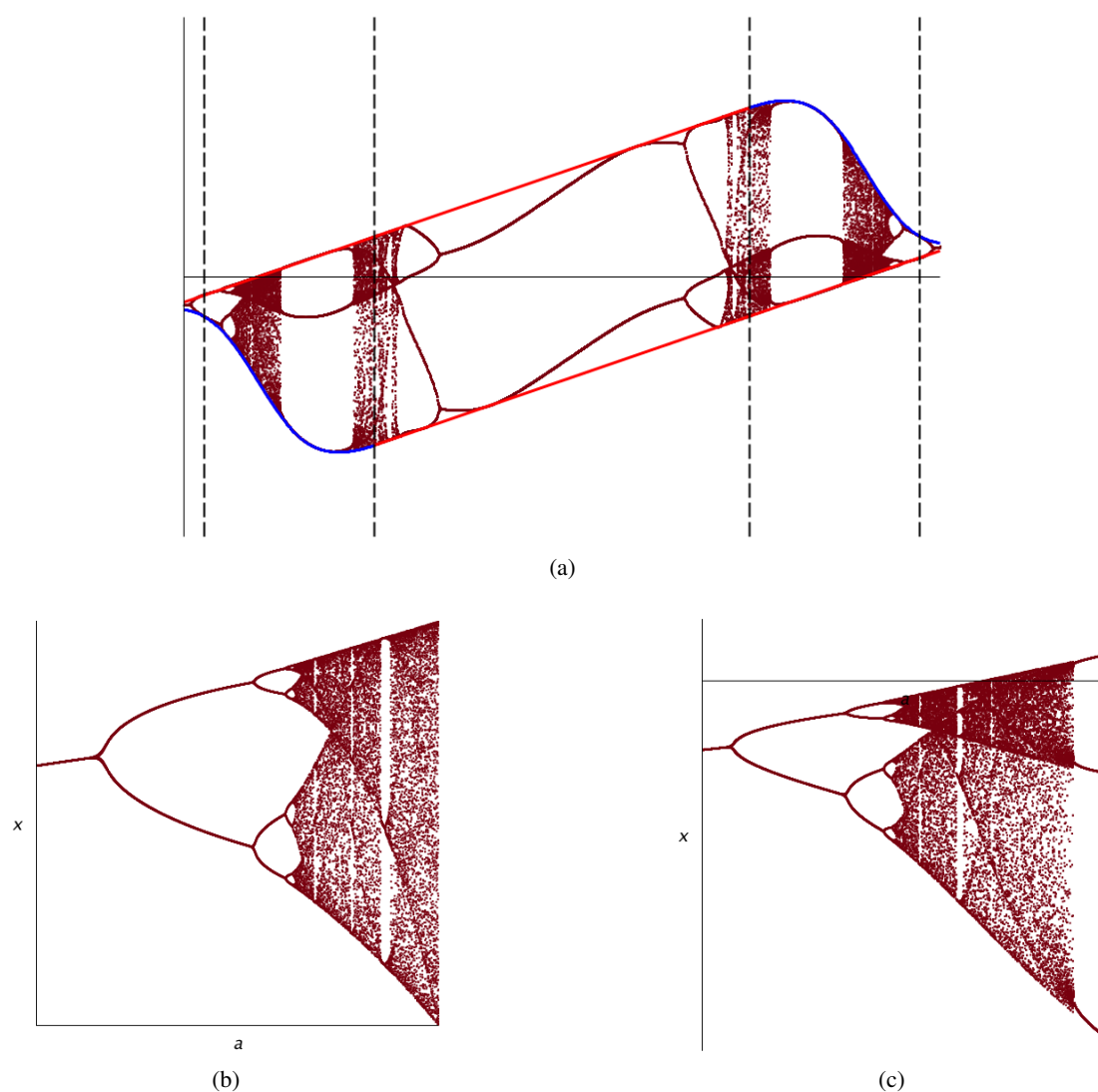
I fig. 11a er de invariante intervaller tegnet over bifurkationsdiagrammet, for at give et indtryk af, hvordan de hænger sammen.

Hvis man kigger nærmere på det første kaotiske vindue omkring $a = 0.1$ i bifurkationsdiagrammet (eller det sidste, som sagt er y symmetrisk omkring $a = 0.5$), så kunne det se ud som om, at der forgår en periodefordobling til kaos lignende den i den logistiske model. I fig. 11c er området omkring det første kaotiske vindue forstørret og sammenlignet med den logistiske model i fig. 11b, og man kan se, at de to bifurkationsdiagrammer ligner hinanden meget. En mulig årsag til dette kunne være, at funktionen y , begrænset til det invariante interval $[y(c_2), y(c_1)]$, faktisk kun er unimodal (d.v.s. med kun et ekstremum). Den minder altså meget om den logistiske model, som også er unimodal, og deler da en stor del af egenskaberne, blandt andet samme vej til kaos.

Det andet kaotiske vindue omkring $a = 0.25$ opstår muligvis som konsekvens af skiftet mellem unimodalitet og bimodalitet i $a = 0.252\dots$, hvor $y(c_1) = c_2$, hvilket vil sige, at det invariante interval omfatter begge ekstrema.

M.h.t. affyringsfrekvensen i fig. 9d, så er en lignende struktur blevet observeret i eksperimenter med blæksprutteneuroner i [15]. Her målte man ligeledes aksonets affyringsfrekvens som funktion af inputtet, og fandt da en lignende trapestruktur med kaotiske intermezzoer, som vi har simuleret her. Det understreger altså A-neuronets evne til at modellere de fænomener, som er blevet observeret i biologiske neuroner.

Når man nu ved, at der er kaos i hjernen, er et nærtliggende opfølgende spørgsmål, hvorvidt kaos har en vigtig funktion i hjernen, eller om den bare er et biprodukt af andre dynamikker. Spørgsmålet er stadig åbent, og der er flere teorier herom. F.eks. har Skarda & Freeman [17] spekuleret, at kaos er vigtig for hjernens fleksibilitet, da den udgør en vis, konstant aktivitet (en slags tomgang), der gør det muligt for hjernen at reagerer hurtigere på nye input end ellers.



Figur 11: **(a)** Bifurkationsdiagram for A-neuronet for $a \in [0, 4]$. Den øvre h.h.v. nedre røde linje viser $y(c_1)$ h.h.v. $y(c_2)$ som funktion af a . Den højre h.h.v. venstre blå kurve viser $y^2(c_1)$ h.h.v. $y^2(c_2)$ som funktion af a . De stiplede linjer angiver (set fra højre) overgangene mellem tilfældene (3),(2a),(1),(2b) og (3) for de invariante intervaller. Bemærk, hvordan den invariante intervaller $[y^2(c_1), y(c_1)]$, $[y^2(c_2), y(c_2)]$ og $[y(c_2), y(c_1)]$ ser ud til at definere formen på diagrammet. **(b)** Bifurkationsdiagram for den logistisk model for $a \in [2.8, 4]$. **(c)** Bifurkationsdiagram for A-neuronet for $a \in [0, 0.14]$.

Der er desuden lavet en del undersøgelser af kaotiske, neurale netværk, og deres beregningsegenskaber (se f.eks. [20], hvor et netværk af A-neuroner bliver analyseret). Traditionelt er kaos i et kunstigt neuralt netværk uønsket, da beregninger i sådanne netværk netop bygger på, at systemet bliver stabilt på et tidspunkt, men man har fundet ud af, at visse kaotiske netværk er bedre til at reagere på ny data, da de ikke besidder samme rigide struktur som konventionelle netværk. Yao, Freeman, Burke og Yang har f.eks. konstrueret et kaotisk netværk, som kan lære at kende forskel på forskellige mønstre, og som præsterer en del bedre en ikke-kaotiske netværk [18]. Dette taler altså for, at kaos faktisk har en nyttig funktion i neurale netværk generelt, og specielt i hjernen.

Konklusion

I ovenstående har vi altså set, at kaos er til stede i hjernen, og at den muligvis spiller en afgørende rolle for den måde, som hjernen fungerer på. At indse dette krævede dog en længere process, hvor vi først så på diskrete dynamiske systemer generelt, hvilket gjorde det muligt at give nogle forslag til definitioner på, hvad kaos egentlig er. Derefter udviklede vi redskaber, der kunne bruges til at eftervise kaotiske fænomener i reelle biologiske systemer ved hjælp af eksperimenter. Der blev da givet et konkret eksempel på, hvordan disse redskaber er blevet brugt til at vise, at biologiske neuroner er kaotiske, hvorefter en model blev opstillet af netop disse neuroner. For at få et indblik i, hvordan denne neuronmodel opførte sig, analyserede vi den med nogle af de redskaber, som vi havde udviklet, hvilket gav os en indsigt i de mulige dynamikker, der styrer neuronaktivitet i hjernen, der på sigt måske kan bidrage til en afgørelse af, hvilken rolle kaos spiller i hjernen.

En ting, der er værd at bemærke m.h.t. brugen af begrebet "kaos" i dette projekt er, hvordan dets betydning faktisk ændrer sig svagt som vi skrider frem. Da vi f.eks. viste, at den logistiske model er Devaney-kaotisk, foregik det formelt stringent og med en matematisk definition af kaos for øje. Da vi kom til kaos i blæksprutteaktioner, var der ikke meget tilbage af denne stringens. Her estimerede man Lyapunov-eksponenter og lavede statistiske tests til at konkludere, at systemet var kaotisk. Betydningen af begrebet kaos er altså ikke helt den samme når Devaney bruger det, i forhold til når f.eks. Aihara et al. bruger det. For den ene er kaos givet ved en formel matematisk definition og for de andre er kaos en fysisk egenskab, der ikke bevises, men findes. Vi har her i projektet set, hvordan disse to opfattelser af kaos, den strengt formelle og den fysisk intuitive, spiller sammen i en grænseflade mellem fysik, biologi og matematik.

Ud fra et matematisk perspektiv er der flere forskellige veje man kan gå herfra. F.eks. kunne det være nyttigt at finde andre mål for kaos i dynamiske systemer, der er mere entydige en Lyapunov-eksponenterne. Hertil har man f.eks. udviklet begreberne topologisk entropi og Kolmogorov-Sinai-entropi (som vi allerede er stødt på tidligere), som er mål for kompleksiteten i h.h.v. et generelt topologisk system, og et metrisk system, og som dermed er mere generelle end Lyapunov-eksponenterne. For mere om entropier, se f.eks. [8,23,24].

M.h.t. til de dynamiske egenskaber af A-neuronet (eller måske endda i endimensionale systemer generelt), kunne det f.eks. være interessant at undersøge præcist hvilken indflydelse iterationerne

$y^n(c_1)$ og $y^n(c_2)$ har på dynamikken af neuronmodellen, da vi allerede har set, at de første iterationer $y(c_i)$, $y^2(c_i)$ er afgørende for, hvordan de invariante intervaller ser ud. Graves lidt dybere i emnet, så viser det sig faktisk, at iterationsmønstret af de to ekstrema bestemmer, hvilke slags baner, som kan eksistere i systemet. Dette er et resultat fra “kneading”-teori (“æltnings”-teori på dansk), som netop bruger iterationerne af ekstrema som analyseredskab af endimensionale systemer. Desuden kan denne teori kombineres med et felt kaldet symbolsk dynamik, som bygger på en analyse af symbolske repræsentationer af en diskretisering af faserum, for at danne et kraftigt redskab til analysen af blandt andet bifurkationsforholdene i dynamiske systemer. For at læse mere om dette, se f.eks. [8].

Endeligt har vi slet ikke berørt kontinuerte dynamiske systemer, som er beskrevet af differentialligninger, selvom meget af den teori, som vi har præsenteret her, faktisk stammer fra undersøgelsen af kontinuerte dynamiske systemer. Her er Lyapunov-eksponenterne et godt eksempel, der først og fremmest blev udviklet til analysen af kontinuerte systemer. På trods af, at de fleste fysiske fænomener beskrives mere nøjagtigt af kontinuerte systemer, har diskrete dynamiske systemer den fordel, at de kan udvise kaotisk opførsel i blot én dimension, mens det kræver tre eller flere dimensioner for et kontinuert system at være kaotisk [25]. Det er med andre ord muligt at modellere meget komplekse dynamikker i lave dimensioner, hvis man bruger diskrete modeller frem for kontinuerte. Dette er især nyttig m.h.t. modelleringen af kaotiske fænomener, hvilket blandt andet er grunden til, at man er begyndt at bruge diskrete dynamiske systemer som biologisk neuronmodeller. Desuden egner diskrete modeller sig også bedre til analysen af måleserier, da målinger jo nødvendigvis tages i diskrete tidsskridt.

Appendiks A

Samling af eksempler på noget af den kode, som er blevet brugt i løbet af projektet til at lave beregninger og tegne diagrammer. Al kode er skrevet til Maple 18. 01.

1. **Cobweb-diagrammer.** Beregning af første $n = 100$ iterationer af funktionen $f(x) = 3x(1 - x)$ ud fra starttilstanden $x_0 = 0.1$ (gemt i variabelen *iterationer*), samt grafisk fremstilling som web-diagram:

```
restart: with(plots):

f:=x->3*x*(1-x):
n:=100:
x0:=0.1:
iterationer:=[x0]:
plot1:={plot({f(x),x},x=0..1, color=black)}:

for i from 1 to n do
    x1:= f(x0):
    iterationer:=[op(iterationer),x1]:
    plot1:=plot1 union {plot([[x0,x0],[x0,x1],[x1,x1]],
```

```

                                color=blue)}}:
        x0:=x1:
    end do:

    display(plot1);

```

2. **Bifurkationsdiagrammer.** Bifurkationsdiagram for funktionen $f(x) = ax(1-x)$ med bifurkationsparameter $a \in (0, 4]$, opløsning $(n, m) = (1000, 80)$, startposition $x_0 = 0.154$, og $dis = 100$ kasserede initiale iterationer.

```

restart: with(plots):

f:=(a,x)->a*x*(1-x):
n:=1000:
m:=80:
dis:=100:
plotpoints:=[]:

for i from 1 to n do
    a:=4*i/n:
    x0:=0.154:
    for iteration from 1 to dis do
        x0:=f(a,x0):
    end do:
    for iteration from dis+1 to dis+m+1 do
        x0:=f(a,x0):
        plotpoints:=[op(plotpoints),[a,x0]]:
    end do:
end do:

pointplot(plotpoints,symbol=point);

```

3. **Lyapunov-eksponenter.** Estimering af den maksimale Lyapunov-eksponent for funktionen $f(x) = 4x(1-x)$ med $n = 100$ iterationer og $dis = 30$ kasserede initiale iterationer, ud fra starttilstanden $x_0 = 0.4633$.

```

restart:

f:=x->4*x*(1-x):
n:=100:
dis:=30:
x0:=0.4633:
sumlist:=[]:

for i from 1 to k do

```

```

        x0:=f(x0):
    end do:

    for i from dis+1 to dis+n+1 do
        sumlist:=[op(sumlist),ln(abs(eval(diff(f(x),x),x=x0)))]:
        x0:=f(x0):
    end do:

    convert(sumlist, '+ ')/n;

```

Referencer

- [1] M. Martelli: *Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos*. Wiley-Interscience, 1999.
- [2] T. Li, J. Yorke: *Period Three Implies Chaos*. The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10 (Dec., 1975), pp. 985-992.
- [3] K. Burns, B. Hasselblatt: *The Sharkovsky Theorem: A Natural Direct Proof*. <http://math.arizona.edu/~dwang/BurnsHasselblattRevised-1.pdf>, 31/05/2015.
- [4] R. Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison -Wesley, 1989.
- [5] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey: *On Devaney's Definition of Chaos*. The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 4 (Apr., 1992), pp. 332-334.
- [6] M. Vellekoop, R. Berglund: *On Intervals, Transitivity = Chaos*. The American Mathematical Monthly Vol. 101, No. 4 (Apr., 1994), pp. 353-355.
- [7] J. Rauch: *Conjugating the Tent and Logistic Maps*, <http://www.math.lsa.umich.edu/~rauch/558/logisticconjugation.pdf>, 31/05/2015.
- [8] R. Gilmore, M Lefranc: *The Topology of Chaos: Alice in Stretch and Squeezeland, Second edition*. Wiley, 2011.
- [9] Y. Hirata and K. Aihara: *Devaney's chaos on recurrence plots*. Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics 2010, Vol.82(3 Pt 2), pp.036209.
- [10] E. Bradley, R. Mantilla: *Recurrence plots and unstable periodic orbits*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 12, 596 (2002).
- [11] N. Marwan, M. Carmen Romano, M.Thiel, J. Kurths: *Recurrence plots for the analysis of complex systems*. Physics Reports 438 (2007) 237 – 329.
- [12]M. B. Kennel: *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction*. Physical Review A. General Physics 45(6) (1992), p. 3403.
- [13] V. Oseledets (2008): *Oseledets theorem*. Scholarpedia, 3(1):1846.

- [14] A. Mees, K. Aihara, M. Adachi, K. Judd, T. Ikeguchi, G. Matsumoto: *Deterministic prediction and chaos in squid axon response*. Physics Letters A 169 (1992), pp. 41-45.
- [15] G. Matsumoto, K. Aihara, Y. Hanyu, N. Takahashi, S. Yoshizawa, J. Nagumo: *Chaos and phase locking in normal squid axons*. Physics Letters A 123(4) (1987), pp. 162-166.
- [16] Y. Hirata, K. Aihara: *Typical chaotic dynamics in squid giant axons*. Procedia IUTAM 5 (2012), pp. 54-58.
- [17] C. Skarda, W. Freeman: *How brains make chaos in order to make sense of the world*. Behavioral and Brain Sciences, 1987, Vol.10 (2), pp.161-173.
- [18] Y. Yao, W. Freeman, B. Burke, Q. Yang: *Pattern recognition by a distributed neural network: An industrial application*. Neural Networks, 1991, Vol.4 (1), pp. 103-121.
- [19] H. Kantz: *A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series*. Physics Letters A 185(1) (1994), pp.77-87.
- [20] K. Aihara, T. Takabe, M. Toyoda: *Chaotic Neural Networks*. Physics Letters A 144(6,7) (1990), pp. 334-340.
- [21] <http://en.wikipedia.org/wiki/Neuron>, 01/06/2015.
- [22] A. Wolf, J. Swift, H. Swinney, J. Vastano: *Determining Lyapunov exponents from time series*. Physica 16D (1985)285-317
- [23] Y. Sinai (2009): *Kolmogorov-Sinai entropy*. Scholarpedia, 4(3):2034.
- [24] B. Hasselblatt and Y. Pesin (2008): *Pesin entropy formula*. Scholarpedia, 3(3):3733.
- [25] B. Ibarz, J. M. Casado, M. A. F. Sanjuan: *Map-based models in neuronal dynamics*. Physics Reports 501 (2011), pp. 1-74.
- [26] J. Nagumo, S. Sato. Kybernetik 3 (1966) 33.