DET NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Lise Volsing Smith

Gruppekohomologi og Gruppeudvidelser

Bachelorprojekt i matematik. Institut for matematiske fag, Københavns Universitet
Bachelor Thesis in Mathematics. Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen

Vejleder: Jesper Grodal

Afleveringsdato: 10. juni 2011

Resumé

Vi starter med at betragte R-moduler, som er abelske grupper med en virkning af ringelementerne fra R på gruppeelementerne. Derefter definerer vi begrebet graduerede R-moduler, som er følger af R-moduler $\{C_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Hvis der findes en endomorfi ∂ af grad -1 og $\partial^2 = 0$, kalder vi det graduerede R-modul sammen med endomorfien for et kædekompleks, hvis derimod ∂ har grad +1, kalder vi det et kokædekompleks. Homologi og Kohomologi defineres til Ker ∂/Im ∂. Vi indfører grupperingen $\mathbb{Z}G$, og viser, at $\mathbb{Z}G$-moduler er et ækvivalent begreb til G-moduler, som er abelske grupper med en G-virkning. Vi definerer projektive resolutioner af R-moduler, til at være eksakte ikke-negative kædekomplekser med en kædeafbildning ind i R-modulerne. Hvis $F \to \mathbb{Z}$ er en projektiv resolution af $\mathbb{Z}$ over ringen $\mathbb{Z}G$, defineres homologi af gruppen G, til at være homologien af F_G, altså $HG = H(F_G)$, hvor F_G er det projektive modul, som opnås af F ved at dividere G-virkningen ud. Hvis vi har to projektive resolutioner af $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}G$, er homologierne isomorfe, idet de er ækvivalente op til homotopi. Vi definerer endvidere homologi og kohomologi af en gruppe med koefficienter i et G-modul ved tensorproduktet og gruppen af homomorfier, så $H_n(G,M) = H_n(F \otimes_G M)$ og $H^n(G,M) = H^n(\mathcal{H}om_G(F,M))$.
Vi behandler også gruppeudvidelser, idet det viser sig, at A-konjugerede splitudvidelser af G ved A, er i 1-1 korrespondance med elementerne i $H^1(G,A)$, og generelt er ækvivalensklasser af udvidelser af G ved A, er i 1-1 korrespondance til elementer i $H^2(G,A)$, når A er abelsk. Gruppeudvidelser kan bruges i problemet, hvor man ønsker at klassificere grupper E med en normal undergruppe A og $G = E/A$ som kvotient. Til sidst bruger vi resultaterne for gruppeudvidelser, til at klassificere p-grupper med en cyklisk undergruppe af index p.

Abstract

We start by considering R-modules, which are abelian groups with an action of the ring elements of R on the group elements. We define the concept of graded R-modules to be sequences of R-modules $\{C_i\}_{i\ in\mathbb{Z}}$. If there exists an endomorphism ∂ of degree -1 and $\partial^2 = 0$, we call the graded R-module with the endomorphism a chain complex, on the other hand if ∂ has degree +1 we'll call it a cochain complex. Homology and cohomology is defined as Ker ∂/Im ∂. We introduce the interger group ring $\mathbb{Z}G$ and show that $\mathbb{Z}G$-modules is an equivalent concept to G-modules, which are abelian groups with a G-action. We define projective resolutions of R-modules to be exact non-negative chain complexes with a chainmap to the R-modules. If $F \to \mathbb{Z}$ is a projective resolution of $\mathbb{Z}$ over the ring $\mathbb{Z}G$, we define homology of the group G to be the homology of F_G, thus $HG = H(F_G)$, where F_G is the projective module obtained from F by dividing out the G-action. If we have two projective resolutions of $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}G$ the homologies are isomorphic, since they are equivalent up to homotopy. We define homology and cohomology of a group with coefficients in a G-module by the tensor product and the group of homomorphisms; $H_n(G,M) = H_n(F \otimes_G M)$ and $H^n(GM) = H^n(\mathcal{H}om_G(F,M))$. We also consider group extensions, as it turns out that A-conjugated split extensions of G by A are in 1-1 correspondence with elements of $H^1(G,A)$, and generally the equivalence classes of extensions G by A are in 1-1 correspondence with elements of $H^2(G,A)$, when A is abelian. Group Extensions can be used in the problem of classifying groups E with a normal subgroup A and $G = E/A$ as the quotient. Finally, we use the results for group extensions to classify the p-groups with a cyclic subgroup of index p.

Indhold

Indledning

Homologi og Kohomologi optræder i mange grene indenfor Algebra og Topologi. Konceptet er udsprunget af topologiske problemer, hvorefter det har fået en algebraisk beskrivelse. Dette bachelorprojekt er en algebraisk tilgang til (ko)homologi, og omhandler primært teorien for gruppekohomologi, og giver også en anvendelse af teorien; at klassificere grupper E med en normal undergruppe A og kvotient $G = E/A$. Dette kan gøres ved gruppeudvidelser. Vi viser, at for gruppeudvidelser af G ved A, hvor A er abelsk, er A-konjugerede splitudvidelser af G ved A i 1-1 korrespondance med elementerne i $H^1(G, A)$, og generelt er ækvivalensklasser af udvidelser af G ved A i 1-1 korrespondance til elementer i $H^2(G, A)$. Konkret klassificeres p-grupper med en abelsk undergruppe af index p.
Projektet forudsætter kendskab til grupper, ringe og lidt modulteori. Dog opsummeres den nødvendige modulteori i starten af projektet. Jeg har taget udgangspunkt i bøgerne *Cohomology of Groups* af Brown og *A Course in Homological Algebra* af Hilton-Stammbach.

1 Modulteori og homologisk algebra

1.1 Moduler

Lad R være en vilkårlig ring med et-element 1_R. Vi definerer et venstre R-modul til at være en abelsk gruppe A sammen med en ringhomomorfi $\varphi : R \to \mathrm{End}(A)$. Vi skriver $\lambda a := (\varphi(\lambda))(a)$ for alle $\lambda \in R$ og $a \in A$. Et venstre R-modul er dermed en abelsk gruppe med en virkning af ringelementer på gruppeelementer, som for alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in R$ og $a_1, a_2, a \in A$ opfylder

M1: $(\lambda_1 + \lambda_2)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a$

M2: $(\lambda_1 \lambda_2)a = \lambda_1(\lambda_2 a)$

M3: $1_R a = a$

M4: $\lambda(a_1 + a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2$

Et højre R-modul A defineres på lignende vis, hvor virkningen sker fra højre. I det følgende vil et R-modul betyde et venstre R-modul.
Vi definerer nu en R-modul homomorfi mellem to R-moduler A og B, til at være en afbildning $f : A \to B$, som opfylder

$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) \quad \text{og} \quad f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

for alle $a, a_1, a_2 \in A$ og $\lambda \in R$. Et R-modul A kaldes frit, hvis der eksisterer en delmængde S af A, så ethvert element $a \in A$, kan skrives entydigt på formen $a = \sum_{s \in S} \lambda(s)s$, hvor $\lambda(s) \in R$ og $\lambda : A \to R$, som opfylder $\lambda(s) = 0$ for alle pånær endeligt mange s. Delmængden S kaldes da en basis for A.
Hvis A har basis S, er R-modul homomorfier fra A fastlagt efter, hvad de er på basiselementerne, for hvis $\varphi : A \to B$ er en R-modul homomorfi, gælder det for $x \in A$

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{s \in S} \lambda(s)s\right) = \sum_{s \in S} \lambda(s)\varphi(s)$$

1.2 Graduerede moduler

Vi betragter nu situationen, hvor man har en følge af R-moduler med R-modul homomorfier imellem

Definition 1.1. Et *gradueret R-modul* C er en følge af R-moduler $C = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. En *gradueret R-modul homomorfi* f mellem graduerede R-moduler C og C' af grad p er en familie af R-modul homomorfier

$$f = \{f_n : C_n \to C'_{n+p}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Vi vil nu betragte graduerede R-moduler med endomorfier ∂ af grad -1 og $+1$, som opfylder at $\partial^2 = 0$.

Definition 1.2. Et *kædekompleks* (C, ∂) over R er et gradueret R-modul $C = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sammen med en endomorfi $\partial : C \to C$ af grad -1, sådan at $\partial^2 = 0$. Et *kokædekompleks* (C', ∂') over R er et gradueret R-modul $C' = \{C'^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sammen med en endomorfi $\partial : C' \to C'$ af grad $+1$, sådan at $\partial'^2 = 0$. Vi kalder ∂ og ∂' for *differentialerne* på C hhv. C'.

Altså er kæde- og kokædekomplekser følgerne

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial'^{i-2}} C'^{i-1} \xrightarrow{\partial'^{i-1}} C'^{i} \xrightarrow{\partial'^{i}} C'^{i+1} \xrightarrow{\partial'^{i+1}} \cdots$$

Vi ser at kæde- og kokædekomplekser er duale begreber i den forstand at hvis vi har et kædekompleks $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, kan vi danne et kokædekompleks ved at sætte $C^{-n} := C_n$ og omvendt.
Vi siger at et kompleks er ikke-negativt hvis $C_n = 0$ for $n < 0$. Hvis $x \in C_n$ skriver vi deg $x = n$.

Definition 1.3. For kæde- eller kokædekomplekser (C, ∂) definerer vi de graduerede R-moduler

$$Z(C) := \text{Ker } \partial \quad \text{og} \quad B(C) := \text{Im } \partial$$

$Z(C)$ kaldes *(co)cycles*, og $B(C)$ kaldes *(co)boundaries*. Vi definerer det graduerede R-modul $H(C) := Z(C)/B(C)$, og kalder det *(kohomologi* af C. Hvis C er et kædekompleks, er homologi af C

$$H(C) = \{H_n(C) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

og hvis C er et kokædekompleks, er kohomologi af C

$$H(C) = \{H^n(C) = \text{Ker } \partial^n / \text{Im } \partial^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

De er veldefinerede idet $\partial^2 = 0$ og dermed Im $\partial \subseteq$ Ker ∂.
Vi kalder et kompleks C *acyklisk* hvis $H_n(C) = 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Definition 1.4. Lad

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

være en kort følge af R-moduler. Vi siger at følgen er *eksakt* på B, hvis Im $\varphi =$ Ker ψ.
En lang følge

$$A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_n \to A_{n+1}$$

kaldes eksakt, hvis den er eksakt på A_i for $i = 1, \dots, n$.

Hvis vi har et eksakt kæde- eller kokædekompleks, er Im $\partial =$ Ker ∂, og dermed er $H_n(C) = 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Så eksakte kæde- og kokædekomplekser er acykliske.

Definition 1.5. En *kædeafbildning* mellem kædekomplekser (C, ∂) og (C', ∂') over R er en gradueret R-modul homomorfi $f : C \to C'$ af grad nul, sådan at $\partial' f = f\partial$, dvs. at diagrammet

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "f_i"'] & C_{i-1} \arrow[d, "f_{i-1}"] \\ C'_i \arrow[r, "\partial'_i"] & C'_{i-1} \end{tikzcd}$$

kommuterer for alle $i \in \mathbb{Z}$.

Definition 1.6. En *homotopi* h mellem to kædeafbildninger f og g er en gradueret R-modul homomorfi $h : C \to C'$ af grad 1 sådan at $\partial' h + h\partial = f - g$. Hvis der findes en homotopi imellem to kædeafbildninger f og g, siger vi at de er *homotopiske*, og skriver $f \simeq g$.

Sætning 1.7. *En kædeafbildning $f : C \to C'$ inducerer en afbildning $H(f) : H(C) \to H(C')$. Hvis to kædeafbildninger er homotopiske er $H(f) = H(g)$. Vi kalder f en svag ækvivalens hvis $H(f)$ er en isomorfi.*

Bevis. Vi betragter for et $i \in \mathbb{Z}$ det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "f_i"'] & C_{i-1} \arrow[d, "f_{i-1}"] \\ C'_i \arrow[r, "\partial'_i"] & C'_{i-1} \end{tikzcd}$$

Hvis $x \in \text{Ker } \partial_i$ er $\partial'_i(f_i(x)) = f_{i-1}(\partial_i(x)) = 0$ så $f_i(x) \in \text{Ker } \partial'_i$. Hvis $y \in \text{Im } \partial_i$ findes et x så $\partial_i(x) = y$, dermed er $f_{i-1}(y) = f_{i-1}(\partial_i(x)) = \partial'_i(f_i(x))$ så $f_{i-1}(y) \in \text{Im } \partial'_i$. Dermed inducerer f en afbildning $H(f) : \text{Ker } \partial_i/\text{Im } \partial_{i+1} \to \text{Ker } \partial'_i/\text{Im } \partial'_{i+1}$, altså

$$\begin{tikzcd} H_i(C) \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "H_i(f)"'] & H_{i-1}(C) \arrow[d, "H_{i-1}(f)"] \\ H_i(C') \arrow[r, "\partial'_i"] & H_{i-1}(C') \end{tikzcd}$$

Antag nu at $f, g : C \to C'$ er to homotopiske kædeafbildninger, dvs. der findes en homotopi $h : C \to C'$ sådan at $\partial' h + h\partial = f - g$. Lad $z \in \text{Ker } \partial_n$ da er

$$(f_n - g_n)(z) = \partial'_{n+1}(h_n(z)) + h_{n-1}(\partial_n(z)) = \partial'_{n+1}(h_n(z))$$

da $\partial_n(z) = 0$. Så $(f_n - g_n)(z) = f_n(z) - g_n(z) \in \text{Im } \partial_{n+1}$, og dermed $H(f_n) = H(g_n)$. Da n var vilkårlig opnår vi $H(f) = H(g)$. □

Definition 1.8. En kædeafbildning $f : C \to C'$ kaldes en *homotopiækvivalens* hvis der findes en kædeafbildning $f' : C' \to C$ sådan at $ff' \simeq \text{id}_{C'}$ og $f'f \simeq \text{id}_C$.

Vi ser at en homotopiækvivalens er en svag ækvivalens, idet de to inducerede afbildninger $H(f) : H(C) \to H(C')$ og $H(f') : H(C') \to H(C)$ af Sætning 1.7 opfylder $H(f)H(f') = H(\text{id}_{C'}) = \text{id}_{H(C')}$ og $H(f')H(f) = H(\text{id}_C) = \text{id}_{H(C)}$.

Sætning 1.9. *Lad (C, ∂) være et kædekompleks. Da er C er acyklisk hvis $0 \simeq id_C$. En homomotopi imellem 0 og id_C kaldes en* contracting *homotopi.*

Bevis. Af Sætning 1.7 er $H(0) = H(\text{id}_C)$. $0 : C \to C$ inducerer $0 : H(C) \to H(C)$ og $\text{id}_C : C \to C$ inducerer $\text{id}_{H(C)} : H(C) \to H(C)$. Det følger nu at $H(C) = 0$. □

Vi bruger følgende resultat fra homologisk algebra uden bevis

Sætning 1.10. *En kort eksakt følge $0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C'' \to 0$ af kædekomplekser giver anledning til en lang eksakt følge af homologi*

$$\cdots \to H_n(C') \xrightarrow{H(i)} H_n(C) \xrightarrow{H(\pi)} H_n(C'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C') \to \cdots$$

Definition 1.11. Lad $f : (C', \partial') \to (C, \partial)$ være en kædeafbildning, da defineres *afbildningskeglen* af f til at være kædekomplekset (C'', ∂'') med $C'' = C \oplus \sum C'$ givet ved $C''_n = C_n \oplus C'_{n-1}$, og $\partial''(c, c') = (\partial c + fc', -\partial' c')$.

Sætning 1.12. *Lad $f : C' \to C$ være en kædeafbildning med afbildningskegle C''. Der er en lang eksakt følge af homologi*

$$\cdots \to H_n(C') \xrightarrow{H(f)} H_n(C) \to H_n(C'') \to H_{n-1}(C') \to \cdots$$

og f er en svag ækvivalens hvis og kun hvis C'' er acyklisk.

Bevis. Betragt følgen $0 \to C \xrightarrow{i} C'' \xrightarrow{\pi} \sum C' \to 0$, hvor i er inklusion og π er projektion. Følgen er eksakt. Af Sætning 1.10 får vi en lang eksakt følge

$$\cdots \to H_n(C') \xrightarrow{H(f)} H_n(C) \to H_n(C'') \to H_n(\sum C') \to \cdots$$

og $H_n(\sum C') = \text{Ker } \partial'_{n-1}/\text{Im}\partial'_n = H_{n-1}(C')$ som ønsket.
Antag f er en svag ækvivalens. Så er $H(f)$ en bijektion, altså injektiv og surjektiv. Betragt

$$\cdots \to H_n(C') \xrightarrow{H_n(f)} H_n(C) \xrightarrow{g} H_n(C'') \xrightarrow{h} H_{n-1}(C') \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(f) \to \cdots$$

Da kæden er eksakt, og $H(f)$ er en bijektion, følger Ker g = Im $H_n(f) = H_n(C)$ og Im h = Ker $H_{n-1}(f) = 0$, altså er h og g nulafbildningerne. Vi ser at $H_n(C'') =$ Ker h = Im $g = 0$, og da n var vilkårlig at C'' er acyklisk.
Antag C'' er acyklisk, dvs. $H_n(C'') = 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, betragt for et $i \in \mathbb{Z}$

$$0 \to H_i(C') \xrightarrow{H_i(f)} H_i(C) \to 0$$

da kæden er eksakt, er Ker $H_i(f)$ = Im $0 = 0$ og Im $H_i(f)$ = Ker $0 = H_i(C)$, hvilket vil sige, at $H(f)$ er injektiv hhv. surjektiv. Så $H(f)$ er en isomorfi, og dermed en svag ækvivalens. □

1.3 Projektive moduler

Definition 1.13. Lad P være et R-modul. Betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "0"] & \\ M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "j"] & M'' \end{tikzcd}$$

hvor i, j, φ er givne homomorfier, rækken er eksakt og $j\varphi = 0$. Hvis ψ findes for alle sådanne tilfælde kaldes P *projektiv.*

Sætning 1.14. *Frie moduler er projektive.*

Bevis. Betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "0"] & \\ M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "j"] & M'' \end{tikzcd}$$

hvor F er et frit modul med basis $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Vi ved at $\varphi(e_\alpha) \in$ Ker j. Da rækken er eksakt er Ker j = Im i, så der findes $x_\alpha \in M'$ så $i(x_\alpha) = \varphi(e_\alpha)$. Vi definerer dermed ψ til at være homomorfien som på basiselementerne er givet ved $\psi(e_\alpha) = x_\alpha$, og opnår dermed $i(\psi(e_\alpha)) = i(x_\alpha) = \varphi(e_\alpha)$, som ønsket. □

Sætning 1.15. *Lad (C, ∂) og (C', ∂') være kædekomplekser og lad $r \in \mathbb{Z}$. Lad $\{f_i : C_i \to C'_i\}_{i \leq r} = \{f_i\}_{i \leq r}$ være en familie af homomorfier sådan at $\partial'_i f_i = f_{i-1}\partial_i$ for $i \leq r$. Hvis C_i er projektive moduler for $i > r$ og $H_i(C') = 0$ for $i \geq r$, da udvides $\{f_i\}_{i \leq r}$ til kædeafbildning $f : C \to C'$, som er entydig op til homotopi. To udvidelser er homotopiske ved en homotopi som opfylder at $h_i = 0$ for $i \leq r$.*

Bevis. Antag, at f_i er blevet defineret for $i \leq n$, hvor $r \leq n$, og at $\partial'_i f_i = f_{i-1}\partial_i$, for $i \leq n$. Vi vil vise eksistensen af f_{n+1} i diagrammet

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Da C er et kædekompleks, er $\partial_n\partial_{n+1} = 0$. f_{n-1} er en homomorfi, så $f_{n-1}\partial_n\partial_{n+1} = 0$. Da $\partial'_n f_n = f_{n-1}\partial_n$ er $\partial'_n f_n \partial_{n+1} = f_{n-1}\partial_n\partial_{n+1} = 0$. Da C_i er projektiv for $i > r$, og $n \geq r$ er C_{n+1} projektiv. Definér $\varphi = f_n\partial_{n+1}$, vi har da diagrammet

$$\begin{tikzcd}
& C_{n+1} \arrow[dl, dashed, "f_{n+1}"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "0"] & \\
C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Hvor rækken er eksakt, idet $H_n(C') = 0$. Af definitionen af et projektivt modul, eksisterer f_{n+1}.
Antag nu, at g er en anden udvidelse af $\{f_i\}_{i \leq r}$. Vi vil finde en homotopi h mellem f og g. Vi kan sætte $h_i = 0$ for $i \leq r$, idet f og g her stemmer overens. Vi antager, at $h_i : C_i \to C'_{i+1}$ er definieret for $i \leq n$, og opfylder at $\partial'_{i+1}h_i + h_{i-1}\partial_i = f_i - g_i$. Vi vil vise eksistensen af h_{n+1}. Lad $\tau_i = f_i - g_i$ og betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd}
& C_{n+1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "h_{n+1}"'] \arrow[d, "\tau_{n+1}"] & C_n \arrow[r] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, "\tau_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "h_{n-1}"] \\
C'_{n+2} \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r] & C'_n &
\end{tikzcd}$$

Definér $\varphi := \tau_{n+1} - h_n\partial_{n+1}$. Vi har at

$$\partial'_{n+1}\varphi = \partial'_{n+1}(\tau_{n+1} - h_n\partial_{n+1}) = \partial'_{n+1}\tau_{n+1} - \partial'_{n+1}h_n\partial_{n+1}$$

og

$$\partial'_{n+1}h_n\partial_{n+1} = (\tau_n - h_{n-1}\partial_n)\partial_{n+1} = \tau_n\partial_{n+1} = \partial'_{n+1}\tau_{n+1}$$

Så $\partial'_{n+1}\varphi = 0$. Af defintionen for et projektivt modul eksisterer $h_{n+1} : C_{n+1} \to C'_{n+2}$, og h_{n+1} opfylder

$$\partial'_{n+2}h_{n+1} = \varphi = \tau_{n+1} - h_n\partial_{n+1} \;\Rightarrow\; \partial'_{n+2}h_{n+1} + h_n\partial_{n+1} = \tau_{n+1}$$

som ønsket. □

2 Heltalsgrupperingen $\mathbb{Z}G$

Lad G være en multiplikativt skrevet gruppe med neutralelement e. Vi definerer $\mathbb{Z}G$ til det frie $\mathbb{Z}$-modul med basis G, dvs.

$$\mathbb{Z}G = \left\{ \sum_{g\in G} a(g)g \;\middle|\; a : G \to \mathbb{Z},\ a(g) = 0 \text{ for alle udentaget endeligt mange } g \in G \right\}$$

Vi definerer en multiplikation i $\mathbb{Z}G$ ved

$$\left(\sum_{g\in G} a(g)g\right) \cdot \left(\sum_{g'\in G} a'(g')g'\right) = \sum_{g,g'\in G} (a(g)\cdot a'(g'))gg'$$

hvor multiplikation af basiselementer g, g' er multiplikationen i G. Vi ser, at $1 \cdot e = e$ er neutralelement for multiplikationen i $\mathbb{Z}G$. Multiplikationen er associativ, idet

$$\begin{aligned}\left(\left(\sum a(g)g\right)\cdot\left(\sum a'(g')g'\right)\right)\cdot\left(\sum a''(g'')g''\right) &= \sum((a(g)\cdot a'(g'))\cdot a''(g''))(gg')g'' \\ &= \sum(a(g)\cdot(a'(g')\cdot a''(g'')))g(g'g'') \\ &= \left(\sum a(g)g\right)\cdot\left(\left(\sum a'(g')g'\right)\cdot\left(\sum a''(g'')g''\right)\right)\end{aligned}$$

hvor summerne er over alle elementerne $g, g', g'' \in G$. Additionen i $\mathbb{Z}G$ har neutralelement 0. Additionen er associativ og kommutativ og multiplikationen er også distributiv pr. konstruktion af $\mathbb{Z}G$. Vi ser dermed, at med den definerede multiplikation og addition, er $\mathbb{Z}G$ en ring, og denne kaldes *heltalsgrupperingen* af G. Vi ser at G er indeholdt i $\mathbb{Z}G$ ved $g = 1 \cdot g$. Ligeledes er $\mathbb{Z}$ indeholdt i $\mathbb{Z}G$ ved $z = z \cdot e$.

$\mathbb{Z}G$ opfylder følgende universielle egenskab

Sætning 2.1. *Lad R være en ring med 1_R, G en multiplikativt skrevet gruppe med neutralelement e og $f : G \to R$ en afbildning, som opfylder $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ og $f(e) = 1_R$. Da findes en entydig udvidelse af f til en ringhomomorfi $f' : \mathbb{Z}G \to R$, sådan at $f'i = f$, hvor $i : G \hookrightarrow \mathbb{Z}G$ er inklusionen*

Bevis. Vores eneste kandidat for en ringhomomorfi $f' : \mathbb{Z}G \to R$ er givet ved $f'\left(\sum_{g\in G} a(g)g\right) = \sum_{g\in G} a(g)f(g)$, idet den skal være additiv og $f'(i(g)) = f(g)$. Den er multiplikativ, da

$$\begin{aligned}f'\left(\left(\sum_{g\in G} a(g)g\right)\cdot\left(\sum_{g'\in G} a'(g')g'\right)\right) &= f'\left(\sum_{g,g'\in G}(a(g)\cdot a'(g'))gg'\right) \\ &= \sum_{g,g'\in G}(a(g)\cdot a'(g'))f(gg') \\ &= \sum_{g,g'\in G}(a(g)\cdot a'(g'))f(g)f(g') \\ &= \left(\sum_{g\in G} a(g)f(g)\right)\left(\sum_{g'\in G} a'(g')f(g')\right) \\ &= f'\left(\sum_{g\in G} a(g)g\right) f'\left(\sum_{g'\in G} a'(g')g'\right)\end{aligned}$$

Vi har, at $f'(i(e)) = f(e) = 1_R$. Så f' er den entydige ringhomomorfi med de ønskede egenskaber. $\square$

2.1 G-moduler

Lad G være en multiplikativt skrevet gruppe. Vi definerer et *G-modul* til at være en abelsk gruppe A sammen med en gruppehomomorfi $\sigma : G \to \mathrm{Aut(A)}$, dvs. at gruppelementerne virker på A som automorfier, og vi skriver ga for $(\sigma(g))a$. Siden automorfier på A er bijektive endomorfier på A, siger den universielle afbildningsegenskab, at der eksisterer en entydig ringhomomorfi $\sigma' : \mathbb{Z}G \to \mathrm{End}(A)$. Det vil altså sige, at vi kan betragte A som et $\mathbb{Z}G$-modul. Hvis vi er givet et $\mathbb{Z}G$-modul A, er A også et G-modul, idet elementerne $g \in G \hookrightarrow \mathbb{Z}G$ er invertible, og ringhomomorfien, som bestemmer virkningen af $\mathbb{Z}G$, sender invertible elementer af $\mathbb{Z}G$ til invertible elementer i $\mathrm{End}(A)$, hvilket vil sige $\mathrm{Aut}(A)$, så σ' restringeret til G er den ønskede gruppehomomorfi. Vi kan altså betragte G-moduler og $\mathbb{Z}G$-moduler som det samme. Et højre G-modul kan ligeledes identificeres med et højre $\mathbb{Z}G$-modul.
Et G-modul kaldes trivielt, hvis $\sigma : G \to \mathrm{Aut}(A)$ er triviel, dvs. $ga = a$ for alle $a \in A$ og $g \in G$. Vi kan dermed betragte enhver abelsk gruppe som et trivielt G-modul for enhver gruppe G.
Den trivielle gruppehomomorfi $\epsilon : G \to \mathbb{Z}$ givet ved $\epsilon(g) = 0$ for alle $g \in G$ giver af Sætning 2.1 en ringhomomorfi $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$. Lad $\sum_{g\in G} a(g)g$ være et element i $\mathbb{Z}G$, da ser vi at, ε er givet ved

$$\varepsilon\left(\sum_{g\in G} a(g)g\right) = \sum_{g\in G} a(g)\epsilon(g) = \sum_{g\in G} a(g)$$

af beviset for Sætning 2.1. Vi kalder ε for *augmentationsafbildningen* af $\mathbb{Z}G$.

3 Resolutioner

Lad R være en ring og M et venstre R-modul. En *resolution* af M over R er en eksakt følge af R-moduler

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

Hvis alle F_i'erne er frie R-moduler, kaldes resolutionen fri, og ligeledes kaldes resolutionen projektiv, hvis ethvert F_i er projektivt.
Lad M være et R-modul; da eksisterer der frie resolutioner af M, og de kan konstrueres på følgende måde: Vælg en surjektion $\varepsilon : F_0 \to M$ med F_0 frit. Vælg nu en surjektion $\partial_1 : F_1 \to \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ med F_1 frit. Da er

$$F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

en eksakt følge, da $\mathrm{Im}\,\partial_1 = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$, og $\mathrm{Im}\,\varepsilon = M = \mathrm{Ker}\,0$. Vi har dermed konstrueret en fri resolution.

Man kan betragte resolutioner som kædekomplekser på to måder. Den første er, at betragte resolutionen som et kædekompleks med M i dimension 0. Det kalder vi det *augmenterede kædekompleks* associeret til resolutionen. En anden måde at betragte resolutionen på, er at betragte F_i'erne som et ikke-negativ kædekompleks, dvs. $F =$

$(F_i, \partial_i)_{i\geq 0}$. og dermed at betragte $\varepsilon : F \to M$ som en kædeafbildning, hvor M er kædekomplekset koncentreret i dimension 0. Det kan visualiseres i følgende diagram:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial_3"] & F_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d] & F_0 \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

Hvis der findes et $n \in \mathbb{Z}$ så $F_i = 0$ for $i > n$ siger vi, at resolutionen har længde $\leq n$, og skriver

$$0 \to F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$$

Vi har følgende resultater for projektive resolutioner

Sætning 3.1. *Givet projektive resolutioner F og F' af et modul M findes en augmentations bevarende kæde afbildning $f : F \to F'$ entydig op til homotopi og f er en homotopiækvivalens.*

Bevis. Lad $\varepsilon : F \to M$ og $\varepsilon' : F' \to M$ være to projektive resolutioner af et modul M. Vi betragter de augmenterede kædekomplekser med M i dimension -1:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed] & M \arrow[r] \arrow[d, "id_M"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & F'_1 \arrow[r] & F'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Af Sætning 1.15 eksisterer en kædeafbildning $f : F \to F'$ som opfylder $\varepsilon' f = \varepsilon\, id_M = \varepsilon$, hvilket vi kalder augmentationsbevarende. Yderligere følger, at f er entydig op til homotopi. Ligeledes eksisterer der en op til homotopi entydig augmentationsbevarende kædeafbildning $f' : F' \to F$. Vi har $ff' \simeq id_{F'}$ og $f'f \simeq id_F$, idet identiteten er en anden udvidelse af $ff' : F' \to F'$ og $f'f : F \to F$. Så f er en homotopiækvivalens. $\square$

Korollar 3.2. *Hvis F, F' er projektive resolutioner, er $H(F) = H(F')$.*

Bevis. Dette følger af Sætning 3.1, og af, at en homotopiækvivalens er en svag ækvivalens. $\square$

3.1 Standardresolutionen

Der er en fri resolution af $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}G$ som altid virker. Vi vil nu konstruere den og kalde den for *standardresolutionen*. Den har forskellige konstruktioner, og vi vil præsentere den i bar-notationen. Lad G være en givet gruppe og betragt $\mathbb{Z}$ som et $\mathbb{Z}G$-modul. Lad F_n for $n \geq 0$ være de frie $\mathbb{Z}G$-moduler med følgende n-tupler som basiselementer

$$[\, g_1 \,|\, g_2 \,|\, \cdots \,|\, g_n] := (1,\, g_1,\, g_1 g_2,\, \ldots,\, g_1 g_2 \cdots g_n)$$

Vi identificerer F_0 som $\mathbb{Z}G$-modulet med basiselement $[\ ] = 1$. Så vi kan identificere F_0 med $\mathbb{Z}G$, idet et element i F_0 er på formen $\sum_{1\in F_0} \lambda(1) \cdot 1 = \lambda(1)$, hvor $\lambda(1) \in \mathbb{Z}G$. Vi kan dermed bruge augmentationsafbildningen $\varepsilon : F_0 = \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$; betragt nu følgen

$$\mathbf{F} :\ \cdots \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

med differentiale $\partial = \{\partial_n\}_{n\geq 1}$ givet ved

$$\begin{aligned}\partial_n[\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,] &= g_1\,[\,g_2\,|\,\cdots\,|\,g_2\,]\\ &+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_{i-1}\,|\,g_ig_{i+1}\,|\,g_{i+2}\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]\\ &+(-1)^n[\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_{n-1}\,]\end{aligned}$$

som er veldefineret idet F_i'erne kan betragtes som G-moduler, jvf. afsnit 2.1.
Der ønskes nu at vise, at $(\mathbf{F},\partial)$ er eksakt. Definér $h = \{h_n : F_n \to F_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ til at være familien af $\mathbb{Z}G$-modul homomorfier, som på elementerne $g[\,g_1\,|\cdots|\,g_n\,]$ (og dermed også basiselementerne) er givet ved

$$h_n(g[\,g_1\,|\cdots|\,g_n\,]) = [\,g\,|\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]$$

Vi vil vise, at h er en contracting homotopi, hvorfra det af Sætning 1.9 følger at $\mathbf{F}$ er en eksakt følge.
Vi skal dermed vise at $\partial_{n+1}h_n + h_{n-1}\partial_n = \mathrm{id}_{F_n}$. Det er nok at vise, at det gælder for basiselementerne, da h_n, ∂_n er $\mathbb{Z}G$-modul homomorfier. For lad $f \in F_n$, da er

$$\begin{aligned}(\partial_{n+1}h_n + h_{n-1}\partial_n)(f) = \partial_{n+1}&\left(h_n\left(\sum_{g_1,\dots,g_n\in G}\lambda([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,])[\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]\right)\right)\\ + h_{n-1}&\left(\partial_n\left(\sum_{g_1,\dots,g_n\in G}\lambda([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,])[\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]\right)\right)\\ =&\sum_{g_1,\dots,g_n\in G}\lambda([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,])\partial_{n+1}(h_n([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]))\\ +&\sum_{g_1,\dots,g_n\in G}\lambda([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,])h_{n-1}(\partial_n([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]))\\ =&\sum_{g_1,\dots,g_n\in G}\lambda([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,])(\partial_{n+1}(h_n([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]))+h_{n-1}(\partial_n([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,])))\end{aligned}$$

som er identiteten, hvis $\partial_{n+1}(h_n([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n]))+h_{n-1}(\partial_n([\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n]))$ er identiteten. Lad derfor $[\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]$ være et basiselement i F_n og betragt

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(h_n[\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]) &= \partial_{n+1}([\,1\,|\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,])\\ &= [\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,] + (-1)^1[\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]\\ &+\sum_{i=2}^{n}(-1)^i[\,1\,|\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_{i-1}\,|\,g_ig_{i+1}\,|\,g_{i+2}\,|\,\cdots\,g_n\,]\\ &+(-1)^{n+1}[\,g_1\,|\,\cdots\,|\,g_n\,]\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
h_{n-1}(\partial_n[\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,]) &= h_{n-1}(g_1[\,g_2 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,]) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i h_{n-1}([\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_{i-1} \,|\, g_i g_{i+1} \,|\, g_{i+2} \,|\, \cdots \,|\, g_n\,]) \\
&+ (-1)^{n+1} h_{n-1}([\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_{n-1}\,]) \\
&= [\,g_1 \,|\, g_2 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,] \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i [\,1 | \,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_{i-1} \,|\, g_i g_{i+1} \,|\, g_{i+2} \,|\, \cdots \,|\, g_n\,] \\
&+ (-1)^n [\,1 \,|\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_{n-1}\,]
\end{aligned}$$

hvor vi undervejs har benyttet at h er en $\mathbb{Z}G$-modul homomorfi. Vi ser at

$$\begin{aligned}
&\partial_{n+1}(h_n[\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,]) + h_{n-1}(\partial_n[\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,]) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}[\,1 \,|\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_{i-1} \,|\, g_i g_{i+1} \,|\, g_{i+2} \,|\, \cdots \, g_n\,] \\
&\quad + (-1)^{n+1}[\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_{n-1}\,] \\
&\quad + [\,g_1 \,|\, g_2 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i [\,1 | \,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_{i-1} \,|\, g_i g_{i+1} \,|\, g_{i+2} \,|\, \cdots \,|\, g_n\,] \\
&\quad + (-1)^n [\,1 \,|\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_{n-1}\,] \\
&\quad = [\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,]
\end{aligned}$$

som ønsket.

4 Tensorproduktet og Hom

4.1 Tensorproduktet

Tensorproduktet over R-moduler

Lad R være en ring, og lad A være et højre og B et venstre R-modul.

Definition 4.1. Lad S være den abelske gruppe, som er fri på mængden $\{a \otimes b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Lad T være undergruppen frembragt af

$$\begin{aligned}
&(a_1 + a_2) \otimes b - (a_1 \otimes b + a_2 \otimes b), \\
&a \otimes (b_1 + b_2) - (a \otimes b_1 + a \otimes b_2), \quad \text{og} \\
&ar \otimes b - a \otimes rb
\end{aligned}$$

for alle $a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$ og $r \in R$. Da er *tensorproduktet* af A og B over R defineret som

$$A \otimes_R B := S/T$$

I $A \otimes_R B$ gælder altså følgende relationer

$$\begin{aligned}
&(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b, \\
&a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2, \quad \text{og} \\
&ar \otimes b = a \otimes rb
\end{aligned}$$

for alle $a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$ og $r \in R$. De første to relationer siger at tensorproduktet er bilineært.

Tensorproduktet over G-moduler

Hvis A og B er enten venstre eller højre $\mathbb{Z}G$-moduler, dermed G-moduler, kan vi definerer tensorproduktet $A \otimes_G B$. For vi kan bruge automorfien $g \mapsto g^{-1}$ af G til at gøre et venstre G-modul A til et højre G-modul, dvs. ved at definere $ag := g^{-1}a$ for alle $a \in A$ og $g \in G$. Vi kan på den måde snakke om $A \otimes_G B$ for to venstre G-moduler. En af relationerne er nu, at $a \otimes gb = ag \otimes b = g^{-1}a \otimes b$. Vi ser da at $a \otimes b = g^{-1}ga \otimes b = ga \otimes gb$, så hvis vi definerer virkningen af G på $A \otimes B$ til at være diagonal $g(a \otimes b) = ga \otimes gb$ opnår vi for A, B venstre R-moduler

$$\begin{aligned}
(A \otimes_G B) &= (A \otimes B)_G \\
&= A \otimes B/\text{undergrp. frembragt af}\{(g(a \otimes b) - (a \otimes b)) : g \in G, a \in A, b \in B\}
\end{aligned}$$

Med andre ord kan vi betragte $A \otimes_G B$ som tensorproduktet over $\mathbb{Z}$, $A \otimes B$, hvor G-virkningen er divideret ud. Idet $A \otimes B \simeq B \otimes A$ ser vi, at $A \otimes_G B \simeq B \otimes_G A$.

Tensorproduktet er et eksempel på en højre-eksakt funktor:

Definition 4.2. En kovariant funktor F er højre-eksakt, hvis for alle eksakte følger $A \to B \to C \to 0$ er følgen $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ eksakt.

Et venstre R-modul kaldes *fladt*, hvis funktoren $- \otimes_R F$ anvendt på en eksakt følge bevarer eksaktheden. Specielt er projektive moduler flade.

Sætning 4.3. *Lad $f : C' \to C$ være en svag ækvivalens mellem komplekser af højre R-moduler. Hvis P er et ikke-negativt kompleks af flade venstre R-moduler, så er $f \otimes P : C' \otimes_R P \to C \otimes_R P$ en svag ækvivalens.*

Bevis. Afbildningskeglen C'' af f er acyklisk af Sætning **??**. $C'' \otimes_R P$ er afbildningskeglen for $f \otimes P$, idet

$$\begin{aligned}
(C'' \otimes_R P)_n = ((C \oplus \sum C') \otimes_R P)_n &= \bigoplus_{i+j=n} (C \oplus \sum C')_i \otimes_R P_j \\
&= \bigoplus_{i+j=n} (C_i \oplus C'_{i-1}) \otimes_R P_j \\
(C \otimes_R P \oplus \sum (C' \otimes_R P))_n &= (C \otimes_R P)_n \oplus (C' \otimes_R P)_{n-1} \\
&= \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes_R P_j \oplus \bigoplus_{i+j=n-1} C'_i \otimes_R P_j \\
&= \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes_R P_j \oplus \bigoplus_{i+j=n} C'_{i-1} \otimes_R P_j \\
&= \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes_R P_j \oplus C'_{i-1} \otimes_R P_j \\
&= \bigoplus_{i+j=n} (C_i \oplus C'_{i-1}) \otimes_R P_j
\end{aligned}$$

Det er nok af Sætning 1.12 at vise, at $C'' \otimes_R P$ er acyklisk. Lad $P^{(n)}$ være n-skellettet af P, dvs komplekset $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to 0$. Vi vil vise, at $C'' \otimes P^{(n)}$ er acyklisk ved induktion. Hvis $n = 0$ er n-skellettet givet ved $0 \to P_0 \to 0$, dvs. et kompleks koncentreret i dimension 0. Da P_0 er fladt forbliver følgen $C''_{i+1} \to C''_i \to C''_{i-1}$ eksakt tensoreret med P_0, og dermed er $C'' \otimes P^{(0)}$ acyklisk. Antag nu, at $C'' \otimes_R P^{(n-1)}$ er acyklisk. Betragt komplekset $P^{(n)}/P^{(n-1)}$; det er koncentreret i dimension n, og består af modulet P_n. Da P_n er fladt er $C'' \otimes (P^{(n)}/P^{(n-1)})$ eksakt, og dermed acyklisk. Betragt nu følgen

$$0 \to C'' \otimes_R P^{(n-1)} \xrightarrow{i} C'' \otimes_R P^{(n)} \xrightarrow{\pi} C'' \otimes_R P^{(n)}/P^{(n-1)} \to 0$$

hvor i er inklusion og π er projektion. Det er en eksakt følge, for hvis for et $n \in \mathbb{Z}$ $x \in \text{Ker } \pi$, er $x_{k-n} \otimes p_n = 0$ hvilket vil sige at

$$x = \bigoplus_{deqx+degp=k} x \otimes p$$

for deg $p = 0, \ldots, n-1$. Så $x \in (C'' \otimes_R P^(n-1))_k$, og er derfor billedet af sig selv under inklusion.
Af Sætning 1.12, følger nu at $C'' \otimes P^{(n)}$ er acyklisk. $(C'' \otimes_R P^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ er en voksende følge af komplekser, og det n'te kompleks er givet ved

$$\cdots \to 0 \to \bigoplus_{i+j=n} C''_i \otimes_R P_j \to \bigoplus_{i+j=n-1} C''_i \otimes P_j \to \cdots \to C''_0 \otimes_R P_0 \to 0$$

Vi ser, at $C'' \otimes_R P$ er foreningen af elementerne i følgen $(C'' \otimes_R P^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$, på den måde, at $(C'' \otimes_R P)_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(C'' \otimes_R P^{(i)})_n$. Lad nu $x \in (C'' \otimes_R P)_n$ for et vilkårligt $n \in \mathbb{Z}$, og antag $\partial''_n x = 0$. Vi ser, at $x \in (C'' \otimes_R P^{(n+1)})_n$ som er acyklisk, dvs. Ker $\partial''_n/\text{Im } \partial''_{n+1} = 0$, så der findes $y \in (C'' \otimes_R P^{(n+1)})_{n+1}$ så $\partial''_{n+1}y = x$, men y tilhører også $(C'' \otimes_R P)_{n+1}$, så vi har vist, at $H_n(C'' \otimes_R P) = 0$, og da n var vilkårlig at $C'' \otimes_R P$ er acyklisk. □

4.2 Hom

$\text{Hom}_R(A, B)$ er gruppen af R-modul homomorfier fra A til B. Den er abelsk, idet vi definerer $\varphi+\psi : A \to B$ ved $(\varphi+\psi)(a) = \varphi(a)+\psi(a)$ for alle $a \in A$. Neutralelementet er nulafbildningen.
Vi kan konstruere et funktionskompleks $\mathcal{H}om_R(C, C')$ for C og C' kædekomplekser. Det n-te led $(\mathcal{H}om_R(C, C'))_n$ er defineret til mængden af graduerede R-modul homomorfier af grad n fra C til C', det vil sige

$$(\mathcal{H}om_R(C, C'))_n = \prod_{q\in\mathbb{Z}} \text{Hom}(C_q, C'_{q+n})$$

og med differentiale $D_n : (\mathcal{H}om_R(C, C'))_n \to (\mathcal{H}om_R(C, C'))_{n-1}$ givet ved

$$D_n(f) = \partial' f - (-1)^n f\partial$$

Sætning 4.4. *Lad R være en vilkårlig ring med et-element $1_R \neq 0_R$, betragtet som et højre R-modul. Lad A være et venstre R-modul med neutralelement 0_A. Da er, som abelske grupper, $R \otimes_R A \simeq A$ og $Hom_R(R, A) \simeq A$.*

Bevis. Lad $\varphi : R \otimes_R A \to A$ være givet ved $\varphi(r \otimes a) = ra$, det er en homomorfi idet $\varphi(r_1 \otimes a_1 + r_2 \otimes a_2) = \varphi(1_R \otimes r_1 a_1 + 1_R \otimes r_2 a_2) = \varphi(1_R \otimes r_1 a_1 + r_2 a_2) = r_1 a_1 + r_2 a_2 = \varphi(r_1 \otimes a_1) + \varphi(r_2 \otimes a_2)$.Lad $\psi : A \to R \otimes_R A$ være givet ved $\psi(a) = (1_R \otimes a)$, der er en homomorfi idet $\psi(m+n) = (1_R \otimes m+n) = (1_R \otimes m) + (1_R \otimes n) = \psi(m) + \psi(n)$. ψ og φ er hinandens inverse, da

$$\varphi(\psi(a)) = \varphi(1_R \otimes a) = 1_R a = a$$
$$\psi(\varphi(r \otimes a)) = \psi(ra) = (1_R \otimes ra) = (r \otimes a).$$

Så $R \otimes_R A \simeq A$.
Lad $\alpha : \mathrm{Hom}_R(R, A) \to A$ være givet ved $\alpha(f) = f(1_R)$. Det er en homomorfi idet $\alpha(f+g) = (f+g)(1_R) = f(1_R) + g(1_R) = \alpha(f) + \alpha(g)$, hvor anden lighed følger af den definerede addition i $\mathrm{Hom}_R(R, A)$.
Vi viser, at α er bijektiv. Antag at $\alpha(f) = 0_A$, så er $f(1_R) = 0_A$. Da f er en R-modul homomorfi gælder $f(r) = rf(1_R) = 0_A$ for alle $r \in R$. Dermed må f være identisk nul. Så Ker $\alpha = 0_{\mathrm{Hom}_R}$ og dermed er α injektiv. $a \in A$ kan rammes af R-modul homomorfien $f(r) = ra$, for $\alpha(f) = f(1_R) = 1_R a = a$, så α er surjektiv. Dermed er $\mathrm{Hom}_R(R, A) \simeq A$. □

5 Homologi af en gruppe

Lad G være en gruppe og M et G-modul. *Gruppen af koinvarianter M_G* defineres som

$$M_G := M/\text{den additive undergrp. frembragt af } \{(gm - m) \mid g \in G, m \in M\}$$

Altså dannes M_G ved at "dividere" G-virkningen ud. M_G kan også beskrives ved tensorproduktet:

Sætning 5.1. *Betragt $\mathbb{Z}$ som et højre G-modul med triviel G-virkning. Da er*

$$M_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$$

Bevis. Betragt $(1 \otimes gm) \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, der gælder at

$$(1 \otimes gm) = (1g \otimes m) = (1 \otimes m)$$

da G-virkningen på $\mathbb{Z}$ er triviel. Der findes dermed en afbildning $\varphi : M_G \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ givet ved $\varphi(\overline{m}) = (1 \otimes m)$, som er veldefineret. Det er en gruppehomomorfi da

$$\varphi(\overline{a+b}) = (1 \otimes a + b) = (1 \otimes a) + (1 \otimes b) = \varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b})$$

Definér nu afbildningen $\psi : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to M_G$ givet ved $\psi(a \otimes m) = \overline{am}$. Vi har at $a \otimes m + b \otimes n = 1 \otimes am + 1 \otimes bn = 1 \otimes (am + bn)$ så

$$\psi(a \otimes m + b \otimes n) = \psi(1 \otimes (am + bn)) = \overline{am + bn} = \overline{am} + \overline{bn} = \psi(a \otimes m) + \psi(b \otimes n)$$

så afbildningen er en gruppehomomorfi. De er inverse til hinanden for

$$\psi(\varphi(\overline{m})) = \psi(1 \otimes m) = \overline{m}$$
$$\varphi(\psi(a \otimes m)) = \varphi(\overline{am}) = 1 \otimes am = a \otimes m$$

Så som grupper opnår vi $M_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$. □

Sætning 5.2. *Der gælder følgende*

(1) Hvis $M' \to M \to M''$ er en eksakt følge af G-moduler, er den inducerede følge $M'_G \to M_G \to M''_G$ eksakt.

(2) Hvis P er et projektivt $\mathbb{Z}G$-modul, er P_G et projektivt $\mathbb{Z}$-modul.

(3) Hvis F er et frit $\mathbb{Z}G$-modul med basis $\{e_i\}_{i\in\alpha}$, så er F_G et fri $\mathbb{Z}$-modul med basis $\{\bar{e}_i\}_{i\in\alpha}$.

Bevis. (1) Lad $M' \to M \to M''$ være en eksakt følge af G-moduler. Da $A_G \simeq \mathbb{Z}\otimes_G M$ for G-moduler M, og tensorproduktet er en højre-eksakt funktor, er $M'_G \to M_G \to M''_G$ eksakt.
(2) Da P er projektiv har vi at ψ eksister for alle diagrammer

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "0"] & \\
M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "j"] & M''
\end{tikzcd}$$

med eksakt række. Problemet er dermed ækvivalent med at vise eksistensen af $\overline{\psi}$ i følgende diagram

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddl, "\psi"'] \arrow[ddr, "0"] & \\
 & P_G \arrow[dl, dashed, "\overline{\psi}"'] \arrow[d, "\overline{\varphi}"] & \\
M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "j"] & M''
\end{tikzcd}$$

hvor $\pi(p) = \overline{p}$, altså er nu $\varphi = \overline{\varphi}\pi$. Vi ønsker at vise eksistens af $\overline{\psi}$, sådan at $i\overline{\psi} = \overline{\varphi}$. Lad $\overline{\psi} : P_G \to M'$ være en afbildning som opfylder $\psi = \overline{\psi}\pi$. Da er $i\overline{\psi}(\overline{g}) = i\overline{\psi}\pi(g) = i\psi(g) = \varphi(g) = \overline{\varphi}\pi(g) = \overline{\varphi}(\overline{g})$, som ønsket. Dermed er P_G projektiv.
(3) Lad F være et frit $\mathbb{Z}G$-modul med basis $\{e_i\}_{i\in\alpha}$. Lad $z \in \mathbb{Z}$ og $m \in F$, da er

$$z \otimes m = 1 \otimes zm = 1 \otimes \sum_{i\in\alpha} \lambda_i e_i$$

under isomorfien af beviset for sætning 5.1 er $\psi\left(1 \otimes \sum_{i\in\alpha} \lambda_i e_i\right) = \overline{\sum_{i\in\alpha} \lambda_i e_i} = \sum_{i\in\alpha} \overline{\lambda_i}\overline{e_i}$, så derfor er $\{\overline{e_i}\}_{i\in\alpha}$ en $\mathbb{Z}$-basis for F_G.

□

Definition 5.3. Lad G være en gruppe og $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ en projektiv resolution af $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}G$. *Homologigrupperne* af G defineres som

$$H_i G := H_i(F_G)$$

Altså er homologi af G homologi af

$$\cdots \to (P_3)_G \to (P_2)_G \to (P_1)_G \to (P_0)_G \to 0$$

Vi ser som konsekvens, at $H_i G = 0$ for $i \leq 0$.
Definitionen er veldefineret, for lad F, F' være to projektive resolutioner af $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}G$. Da er af Sætning 5.2 F_G og F'_G projektive resolutioner af $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}$, og af Korollar 1.16 følger at $H(F_G) = H(F'_G)$. Dermed er det fuldstændigt frit for os at vælge hvilken projektiv resolution vi ønsker, så længe den er projektiv eller fri (da frie resolutioner er projektive af Sætning 1.14).

Korollar 5.4. *Idet der af Sætning 5.1 gælder $F_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F$ er*

$$H_i G \simeq H_i(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F)$$

Så homologi af G er homologi af

$$\cdots \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} P_3 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} P_2 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} P_1 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} (P_0)_G \to 0$$

Homologi af en cyklisk gruppe

Eksempel 5.5. Antag G er en endelig cyklisk gruppe af orden n med frembringer t. Vi vil vise at

$$H_i G \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{hvis } i = 0, \\ \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n & \text{hvis } i \text{ ulige}, \\ 0 & \text{hvis } i \text{ lige.} \end{cases}$$

Dette vil vi vise, ved at betragte følgen

$$\cdots \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$$

hvor afbildningerne er multiplikation med $t-1$ og $N = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$, og vise, at det er en resolution af $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}G$. Elementer i heltalsgrupperingen $\mathbb{Z}G$ er på formen

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i \quad \text{med} \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}$$

Vi viser at det er en eksakt følge.
Lad $x \in \text{Im }(t-1)$, da er $x = y(t-1)$ for et $y \in \mathbb{Z}G$. x ligger i kernen af N, da

$$y(t-1)N = y(t-1)\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i\right) = y\left(\sum_{i=0}^{n-1}(t^{i+1} - t^i)\right) = y(t^n - t^0) = y \cdot 0 = 0$$

Lad $x \in \text{Im } N$, da er $x = yN$ for et $y \in \mathbb{Z}G$. x ligger i kernen af $(t-1)$ da

$$yN(t-1) = y\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i\right)(t-1) = y\left(\sum_{i=0}^{n-1}(t^{i+1} - t^i)\right) = 0$$

Lad $x \in \text{Ker }(t-1)$, dvs. $x(t-1) = 0$, så

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i\right)(t-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (t^{i+1} - t^i) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{men} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (t^{i+1} - t^i) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i-1} t^i - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i \\ &= \lambda_{n-1} - \lambda_0 t^0 + \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i) t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i) t^i \end{aligned}$$

med $\lambda_{-1} := \lambda_{n-1}$. Da $\{t^i\}_{i=0}^{n-1}$ er en basis for G, er summen $\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_{i-1} - \lambda_i)t^i = 0$ hvis og kun hvis $\lambda_{i-1} - \lambda_i = 0$ for $i = 0, \ldots, n-1$. Vi ser at dette betyder at $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} := \lambda$, så

$$x = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} t^i$$

som er billedet af $\lambda \in \mathbb{Z}G$ under multiplikation med N. Så x ligger i billedet af N. Lad $x \in \text{Ker } N$. Skriv $x = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i$. Vi ser at

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i\right) &= \sum_{i,j=0}^{n-1} \lambda_i t^{i+j} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=0}^{n-1} t^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\right) t^j\end{aligned}$$

som er nul hvis og kun hvis $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 0$. Lad $y = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i t^i$ hvor μ_i'erne opfylder, at forskellen $\mu_{i-1} - \mu_i = \lambda_i$, og hvor $\mu_{-1} := \mu_{n-1}$. Dette er muligt idet $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_{i-1} - \mu_i = 0$. Vi ser, at

$$y(t-1) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i(t^{i+1} - t^i) = \sum_{i=0}^{n-1}(\mu_{i-1} - \mu_i)t^i = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i$$

Så $x \in \text{Im } (t-1)$. Vi har dermed vist at kæden er eksakt.
Vi opnår nu følgen af $(\mathbb{Z}G)_G$ til at være

$$\cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

da vi dividerer G-virkningen ud. For hvis $z \in \mathbb{Z}$ er $zN = zt^0 + \ldots zt^{n-1} = zn$ og $z(t-1) = tz - z = 0$. Vi ser at

$$H_0(G) = \text{Ker } 0/\text{Im } 0 = \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$$

lad i være lige, da er

$$H_i(G) = \text{Ker } n/\text{Im } 0 = 0/0 = 0$$

lad i være ulige, da er

$$H_i(G) = \text{Ker } 0/\text{Im } n = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$$

som ønsket.

Homologi ved standardresolutionen

Eksempel 5.6. Lad G være en vilkårlig gruppe. Vi kan vælge en projektiv resolution af $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}G$ til at være standardresolutionen. Vi vil da betegne kædekomplekset F_G med $C_*(G)$. Vi kan nu beskrive $C_*(G)$ ved sætning 5.2. $C_n(G)$ har en $\mathbb{Z}$-basis givet ved n-tuplerne $[\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,]$, som nu er billedet af basiselementerne $[\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,]$ af

F_n i $(F_n)_G$, det vil sige, hvor G-virkningen er divideret ud. Vi har at det inducerede differentialet $\overline{\partial_n} : C_n(G) \to C_{n-1}(G)$ er givet ved

$$\begin{aligned}\overline{\partial_n}[\, g_1 \mid \cdots \mid g_n \,] &= [\, g_2 \mid \cdots \mid g_n \,] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [\, g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid g_i g_{i+1} \mid g_{i+2} \mid \cdots \mid g_n \,] \\ &\quad + (-1)^n [\, g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1} \,]\end{aligned}$$

idet vi af diagrammet

$$\begin{tikzcd} F_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\pi_n"'] & F_{n-1} \arrow[d, "\pi_{n-1}"] \\ (F_n)_G \arrow[r, "\overline{\partial_n}"] & (F_{n-1})_G \end{tikzcd}$$

hvor $\pi_n : F_n \to (F_n)_G$ er homomorfien som sender et element g i sin sideklasse $\overline{g}$, får at $\overline{\partial_n}(\overline{g}) = \overline{\partial_n}(\pi_n(g)) = \pi_{n-1}(\partial_n(g)) = \overline{\partial_n(g)}$. Vi betragter nu $C_*(G)$ i lave dimensioner. Da har vi, at

$$C_2(G) \xrightarrow{\overline{\partial_2}} C_1(G) \xrightarrow{\overline{\partial_1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

med

$$\overline{\partial_2}[g_1, g_2] = [g_2] - [g_1 g_2] + [g_1] \quad \text{og} \quad \overline{\partial_1} = [\ \ ] - [\ \ ] = 0$$

Vi kan dermed udregne

$$H_0 G = H_0(C_0(G)) = \text{Ker } 0 / \text{Im } \overline{\partial_1} = \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$$

6 Homologi og Kohomologi med Koefficienter

Lad F være en projektiv resolution af $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}G$ og lad M være et G-modul.

Definition 6.1. *Homologi af G med koefficienter i M* defineres ved

$$H_*(G, M) := H_*(F \otimes_G M)$$

hvor $F \otimes_G M$ er komplekset opnået fra F ved at tilføje funktoren $- \otimes_G M$.

Altså er homologi af G med koefficienter i M homologi af

$$\cdots F_3 \otimes_G M \to F_2 \otimes_G M \to F_1 \otimes_G M \to F_0 \otimes_G M \to 0$$

Dette er en naturlig generalisering af H_*G, for ved at tage koefficienter i $\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, opnår vi nemlig

$$H_*(G, \mathbb{Z}) = H_*(F \otimes_G \mathbb{Z}) = H_*(\mathbb{Z} \otimes_G F) = H_*(F_G)$$

En ækvivalent definition er at tage projektive resolutioner for både $\mathbb{Z}$ og M, $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ og $P \xrightarrow{\eta} M$ og sætte

$$H_*(G, M) := H_*(F \otimes_G P)$$

Det er konsistent med forrige definition, da η inducerer en svag ækvivalens $F \otimes \eta : F \otimes_G P \to F \otimes_G M$ af Sætning 4.3, idet F er et ikke-negativt kompleks bestånde af projektive dvs. flade moduler. Så

$$H_*(F \otimes_G P) \simeq H_*(F \otimes_G M)$$

Vi har yderligere en svag ækvivalens $\varepsilon \otimes P : F \otimes_G P \to \mathbb{Z} \otimes_G P \simeq P_G$, så

$$H_*(F \otimes_G P) = H_*(\mathbb{Z} \otimes_G P) = H_*(P_G)$$

For en gruppe G med koefficienter i M har vi nu tre måde at regne homologien $H_*(G, M)$ ud på. Vi vil nu vise at $H_0(G, M) = M_G$, og har derfor brug for følgende sætning

Sætning 6.2. *Lad F være en højre-eksakt funktor og $P \to A$ en projektiv resolution af A. Da er $H_0(F(P)) \simeq F(A)$.*

Bevis. Vi betragter resolutionen $P_1 \to P_0 \to A \to 0$, som er en eksakt følge. Da F er højre-eksakt er $F(P_1) \xrightarrow{\varphi} F(P_0) \xrightarrow{\alpha} F(A) \to 0$ eksakt. Vi ser at $H_0(F(P)) =$ Ker $\psi/$Im φ er homologien af kædekomplekset

$$F(P_1) \xrightarrow{\varphi} F(P_0) \xrightarrow{\psi} 0$$

Vi har af den eksakte følge at Ker $\psi/$Im $\varphi = F(P_0)/$Ker α. Vi påstår at $F(P_0)/$Ker $\alpha \simeq F(A)$. Definer en afbildning $F(P_0)/$Ker $\alpha \to F(A)$ givet ved $\overline{x} \mapsto \alpha(x)$. Det er en homomorfi, idet $\overline{x+y} \mapsto \alpha(x+y) = \alpha(x) * \alpha(y)$ som er billedet af $\overline{x} + \overline{y}$.
Vi ser at hvis $\alpha(x) = 0$ er $x \in$ Ker α, så $\overline{x} = 0$, så afbildningen er injektiv. Hvis $y \in F(A)$ findes et $z \in F(P_0)$ så $\alpha(z) = y$, idet α er surjektiv. Så vil $\overline{z} \mapsto y$, så afbildningen er surjektiv. Vi konkluderer, at det er en isomorfi. □

Korollar 6.3. *Med $F = - \otimes_G M$ opnår vi*

$$H_0(G, M) = \mathbb{Z} \otimes_G M \simeq M_G$$

Vi vender nu blikket mod definitionen af *kohomologi med koefficienter*. Lad $F \to \mathbb{Z}$ være en projektiv resolution af $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}G$. Vi betragter $M = (M_n)$ som et kompleks koncentreret i dimension 0, dvs. $M_0 = M$ og $M_i = 0$ for $i \neq 0$. Betragt nu kædekomplekset $\mathcal{H}om_G(F, M)$. $\mathcal{H}om_G(F, M)_n$ er defineret som mængden af graduerede $\mathbb{Z}G$-modul homomorfier af grad n fra F til M, dvs.

$$\mathcal{H}om_G(F, M)_n = \prod_{q \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_G(F_q, M_{q+n})$$

da $M_i = 0$ for $i \neq 0$, vil $\mathrm{Hom}_G(F_q, M_{q+n})$ for $q + n \neq 0$ være mængden indeholdende den trivielle homomorfi, som sender alt i 0. For $q + n = 0$ kan der også være ikke-trivielle homomorfier. Vi ser dermed at

$$\mathcal{H}om_G(F, M)_n = \mathrm{Hom}_G(F_{-n}, M)$$

Vi kan dermed se $\mathcal{H}om_G(F, M)$ som et kokædekompleks, ved at indeksere på følgende måde

$$\mathcal{H}om_G(F, M)^n = \mathcal{H}om_G(F, M)_{-n} = \mathrm{Hom}_G(F_n, M)$$

Det er et ikke-negativt kokædekompleks

$$\mathrm{Hom}_G(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_G(F_1, M) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Hom}_G(F_2, M) \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

med differentiale $\delta = \{\delta^n\}_{n\geq 0}$ givet ved

$$(\delta^n u)(x) = (-1)^{n+1} u(\partial_{n+1}(x)) \quad \text{for } u \in \mathrm{Hom}_G(F_n, M), x \in F_{n+1}$$

hvor $\partial = \{\partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ er differentialet på resolutionen F.
Vi checker at $\delta^2 = 0$: Lad $u \in \mathrm{Hom}_G(F_n, M)$ og $x \in F_{n+2}$, da er

$$\begin{aligned}(\delta^{n+1}(\delta^n u))(x) &= (-1)^{n+2}(\delta^n u)(\partial_{n+2}(x)) \\ &= (-1)^{2n+3} u(\partial_{n+1}(\partial_{n+2}(x))) = 0\end{aligned}$$

da $\partial_{n+1}\partial_{n+2} = 0$.

Definition 6.4. Vi definerer kohomologi af G med koefficienter i M til at være

$$H^*(G, M) := H^*(\mathcal{H}om_G(F, M))$$

Altså er kohomologi af G med koefficienter i M, kohomologien af

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(F_0, M) \to \mathrm{Hom}_G(F_1, M) \to \mathrm{Hom}_G(F_2, M) \to \cdots$$

Vi ser at $H^n(G, M) = 0$ for $n < 0$.

Homologi og Kohomologi med koefficienter af standardresolutionen

Eksempel 6.5. Hvis vi for **F**$= \{F_n, \partial_n\}$ tager standard resolutionen, definerer vi

$$C_*(G, M) := (F \otimes_G M)_* = (M \otimes_G F)_* \quad , \quad C^*(G, M) = (\mathrm{Hom}_G(F, M))*$$

Vi husker at F_n er $\mathbb{Z}G$-modulet med basiselementer $[\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,]$, og elementer i F_n er dermed på formen

$$\sum_{g_1, \cdots, g_n \in G} \lambda([\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,])[\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,]$$

for $\lambda([\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,]) \in \mathbb{Z}G$. Betragt nu elementer i $C_n(G, M)$, de er givet ved

$$n \otimes \sum_{g_1, \ldots, g_n \in G} \lambda([\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,])[\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,] = \sum_{g_1, \ldots, g_n \in G} n\lambda([\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,]) \otimes [\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,]$$

for $n \in M$ og $\lambda([\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,]) \in \mathbb{Z}G$. Altså er elementerne endelige summer (idet elementerne i F_n er endelige summer) af elementer $m \otimes [\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,]$ for $m \in M$. Differentialet $\delta_n = M \otimes_G \partial_n : C_n(G, M) \to C_{n-1}(G, M)$ er givet ved

$$\begin{aligned}(M \otimes_G \partial_n)(m \otimes [\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,]) &= m \otimes g_1[\, g_2 \,|\, \cdots \,|\, g_n \,] \\ &+ m \otimes \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_{i-1} \,|\, g_i g_{i+1} \,|\, g_{i+2} \,|\, \cdots \,|\, g_n \,] \\ &+ m \otimes (-1)^n [\, g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_{n-1} \,]\end{aligned}$$

Elementer i $C^*(G,M)$ er $\mathbb{Z}G$-modul homomorfier. Betragt det n'te led i $C^*(G,M)$: $C^n(G,M) = \mathrm{Hom}_G(F_n, M)$. $\mathbb{Z}G$-homomorfier $\varphi : F_n \to M$ er bestemt ved hvad de er på basiselementerne, så φ svarer til en funktion $f : G^n \to M$.
På den anden side, hvis vi har en funktion $f : G^n \to M$, kan vi definere en $\mathbb{Z}G$-modul homomorfi φ til at opfyldende

$$\varphi\left(\sum_{g_1,\cdot,g_n \in G} \lambda([\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,])[\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,]\right) = \sum_{g_1,\cdot,g_n \in G} \lambda([\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,]) f([\,g_1 \,|\, \cdots \,|\, g_n\,])$$

Dermed er $C^n(G,M)$ og $\{f : G^n \to M\}$ i 1-1 korrespondance.
Op til fortegn er differentialet $\delta^{n-1} : C^{n-1}(G,M) \to C^n(G,M)$ givet ved

$$\begin{aligned}(\delta^{n-1} f)(g_1, \dots, g_n) &= f(\partial_n(g_1, \dots, g_n)) \\ &= g_1 f(g_2, \dots, g_n) - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n) \\ &+ (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1})\end{aligned}$$

Homologi og Kohomologi med koefficienter for cykliske grupper af endelig orden

Eksempel 6.6. Lad G vær en cyklisk gruppe af orden n og med frembringer t. Vi har da af eksempel 5.5 resolutionen af $\mathbb{Z}$ over $\mathbb{Z}G$

$$\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$$

hvor $N = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$. For at finde homologien og kohomologien af G med koefficienter, anvender vi funktorerne $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ og $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, M)$, og opnår

$$\cdots \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M$$
$$M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} \cdots$$

Idet for enhver ring R og ethvert R-modul A gælder at $R \otimes_R A \simeq A$ og $\mathrm{Hom}_R(R, A) \simeq A$, jvf. Sætning 4.4
Vi ser, at N opfylder at $Ngm = Nm$ for alle $g \in G$ og $m \in M$, idet $g = t^j$ for et $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Så N er defineret på M_G. Vi ser også at Im N er indeholdt i $M^G = \{m \in M \,|\, \forall g \in G :\ gm = m\}$. Dermed inducerer N en afbildning $\overline{N} : M_G \to M^G$, som vi kalder norm afbildningen. For en tilfældig gruppe H, er norm afbildningen multiplikation med $\sum_{h \in H} h$.
Lad i være ulige, da er

$$H_i(G,M) = H^{i+1}(G,M) = \mathrm{Ker}\ (t-1)/\mathrm{Im}\ N = M^G/\mathrm{Im}\ N = \mathrm{Coker}\ \overline{N}$$

lad nu i være lige, da er

$$\begin{aligned}H_i(G,M) = H^{i-1}(G,M) = \mathrm{Ker}\ N/\mathrm{Im}\ (t-1) &= \mathrm{Ker}\ N/\{mt - m \,|\, m \in M\} \\ &= \mathrm{Ker}\ \overline{N}\end{aligned}$$

Homologi og Kohomologi med Koefficienter af cykliske grupper med uendelig orden

Eksempel 6.7. Lad G være en cyklisk gruppe af uendelig orden med frembringer t. Betragt følgen

$$0 \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

Elementer i $\mathbb{Z}G$ er på formen

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i t^i \quad \text{hvor } \lambda_i = 0 \text{ for alle pånær endeligt mange } i$$

Vi viser, at det er en eksakt følge, dermed er det en fri resolution. Lad $x \in \text{Im }(t-1)$, da er

$$x = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i t^i\right)(t-1) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i (t^{i+1} - t^i)$$

Så

$$\varepsilon(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i(\varepsilon(t^{i+1}) - \varepsilon(t^i)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i (1-1) = 0$$

så $x \in \text{Ker }\varepsilon$. Lad $y \in \text{Ker }\varepsilon$, da er $\varepsilon(y) = 0$. Vi har, at

$$\varepsilon(y) = \varepsilon\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i t^i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i \varepsilon\left(t^i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i$$

Så $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i = 0$, og ser af eksempel 5.5 at $y \in \text{Im }(t-1)$. Så $\text{Im }(t-1) = \text{Ker }\varepsilon$. Vi har yderligere, at $\text{Im } 0 = \{0\} = \text{Ker }(t-1)$, idet $x(t-1) = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i t^i\right)(t-1) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i (t^{i+1} - t^i)$ hvis og kun hvis $\lambda_i = 0$ for alle $i \in \mathbb{Z}$. Vi ser, at $\text{Im }\varepsilon \subseteq \text{Ker } 0$. Lad $x \in \text{Ker } 0 = \mathbb{Z}$. Da er $\varepsilon(z) = z\varepsilon(1) = z$, så $x \in \text{Im }\varepsilon$.
$H_*(G, M)$ er homologien af

$$\cdots \to 0 \to M \xrightarrow{t-1} M \to 0$$

og $H^*(G, M)$ er kohomologien af

$$0 \to M \xrightarrow{t-1} M \to 0 \to \cdots$$

Vi ser at $H^1(G, M) = H_0(G, M) \simeq M_G$ af Korollar 6.3, $H_1(G, M) = H^0(G, M)$ og $H_i(G, M) = H^i(G, M) = 0$ for $i > 1$.

7 Gruppeudvidelser

En *udvidelse* af en gruppe G ved en gruppe N er en kort eksakt følge

$$1 \to N \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G \to 1 \tag{1}$$

Vi ser at $\ker \alpha = 1$ og $\text{Im } \beta = G$, så α er injektiv, og β er surjektiv. En udvidelse $1 \to N \to E' \to G \to 1$ siges at være ækvivalent med (1), hvis der findes en afbildning

$E \to E'$, som får det tilhørende diagram

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\ 1 \arrow[r] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[r] & 1 \\ & & E' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

til at kommutere. Sådan en afbildning er nødvendigvis en isomorfi, idet den skal være surjektiv og injektiv, for at udvidelserne er eksakte.
De følgende afsnit vil handle om at klassificere udvidelser af G ved N op til ækvivalens. Dette viser sig, at indvolere kohomologigrupperne $H^1(G,-)$ og $H^2(G,-)$. Dermed vil vi prøve at forstå, på hvilke måder, man kan opbygge gruppen E med N som normal undergruppe og G som kvotient. Vi vil udelukkende betragte tilfældet, hvor gruppen $A := N$ er abelsk og skrevet additiv:

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

Siden A er indlejret som en normal undergruppe af E, virker E på A ved konjugering. Siden A er abelsk, virker A på sig selv ved konjugering, så vi har en induceret gruppevirkning af $E/A = G$ på A. Lad $g \in G$, da π er surjektiv vælg da $e \in E$ så $\pi(e) = g$. Gruppevirkningen af G på A er da karakteriseret ved

$$i(g.a) = ei(a)e^{-1} \tag{2}$$

Vi har at $\pi(1) = 1$, så

$$i(1.a) = 1\, i(a)\, 1^{-1} = i(a)$$

da i er injektiv, må $1.a = a$. Lad nu $g, h \in G$ og vælg e_g, e_h sådan at $\pi(e_g) = g$ og $\pi(e_h) = h$, og betragt

$$i((gh).a) = e_g e_h i(a)(e_g e_h)^{-1} = e_g e_h i(a) e_h^{-1} e_g^{-1} = i(g.(h.a))$$

da i er injektiv må $(gh).a = g.(h.a)$. Virkningen er dermed veldefineret. Vi ser, at (2) kan omskrives til

$$ei(a) = i(ga)e$$

og observerer at billedet $i(A)$ kommuterer med elementer i E, dvs. er central i E, hvis og kun hvis virkningen er triviel. I dette tilfælde kalder vi udvidelsen *central.*
Nu har vi defineret en struktur, som gør A til et G-modul. Vi kan dermed omtolke klassifikationsproblemet, ved at lade et G-modul A være givet, og prøve at klassificere udvidelserne af G ved A, som giver den definerede virkning af G på A. Vi betragter først problemet for splitudvidelser.

7.1 Splitudvidelser

Lad A være et G-modul med udvidelsen

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{3}$$

som giver den virkningen (2) af G på A. Vi siger, at udvidelsen er *split*, hvis der findes en homomorfi $s : G \to E$ så $\pi s = \mathrm{id}_G$, og da kalder vi s en *splitting*. Vi ser, at π restringeret på billedet $s(G)$ er en isomorfi. Lad nu $s(g) \in s(G)$, da er $(s\pi)(s(g)) = s(\pi(s(g)) = s(g)$, så $s(\pi|s(G)) = \mathrm{id}_{s(G)}$. Lad $e \in i(A) \cap s(G)$, da $e \in i(A)$ er $\pi(e) = 1$, så $s(\pi(e)) = 1$, men da $e \in s(G)$ er $s(\pi(e)) = e$, så $e = 1$. Altså er $i(A) \cap s(G) = \{1\}$. Vi opnår altså, at $E = i(A) \cdot s(G)$, dvs. ethvert element i E, er entydigt skrevet $e = i(a)s(g)$, for et $a \in A$ og $g \in G$.

Sætning 7.1. *Udvidelsen* $0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ *er split, hvis og kun hvis den er ækvivalent til udvidelsen*

$$0 \to A \xrightarrow{i'} A \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \to 1 \tag{4}$$

hvor $A \rtimes G$ *er det* semi-direkte produkt *af* G *og* A *relativt til virkningen (2) og* i', π' *er den kanoniske inklusion* $a \mapsto (a, 1)$ *hhv. den kanoniske projektion* $(a, g) \mapsto g$. *Det semi-direkte produkt er pr. definition mængden* $G \times A$ *med produktet* $(a, g)(a', g') = (a + ga', gg')$.

Bevis. Vi vil først vise, at de to udvidelser er ækvivalente, dvs. $E \simeq A \rtimes G$, hvis udvidelsen (3) er split.
Lad $s : G \to E$ være en homomorfi så $\pi s = \mathrm{id}_G$, definer funktionen $\varphi : A \times G \to E$ ved $\varphi(a, g) = i(a)s(g)$. Den er surjektiv, da elementer i E er på formen $i(a)s(g)$ for $a \in A$ og $g \in G$. Den er injektiv, da elementerne i E er entydigt skrevne på formen $i(a)s(g)$ og i og s er injektive. Så φ er en bijektion. Vi vil nu finde multiplikationen i $A \times G$, som gør φ til en isomorfi. Lad $e, e' \in E$, da er $e = i(a)s(g)$, $e' = i(a')s(g')$ for $a, a' \in A$ og $g, g' \in G$. Betragt

$$ee' = i(a)s(g)i(a')s(g') = i(a)i(ga')s(g)s(g') = i(a + ga')s(gg')$$

af den definerede virkning af G på A. For at φ er en homomorfi, skal der gælde at $\varphi((a, g)(a', g')) = \varphi((a, g))\varphi((a', g'))$, altså

$$\varphi((a, g))\varphi((a', g')) = ee' = i(a + ga')s(gg') = \varphi((a + ga', gg')) = \varphi((a, g)(a', g'))$$

så produktet er givet ved $(a, g)(a', g') = (a+ga', gg')$. $A\times G$ med dette produkt er det semi-direkte produkt $A \rtimes G$. Hvis $E \simeq A \rtimes G$, definer da $s : G \to E$ til $g \mapsto (1, g)$. $\square$

Hvis virkningen af G på A er triviel er E isomorf med det direkte produkt $A \times G$. I dette tilfælde er s en homomorfi $s : G \to A \times G$, sådan at $\pi s = \mathrm{Id}_G$. Vi har $\pi(s(g)) = \pi(s_1(g), s_2(g))$, og ser, at $\pi(s(g)) = g$ hvis $s_2(g) = g$, altså hvis $s_2 = \mathrm{id}_G$. Det eneste krav på s_1 er at det er en homomorfi $s_1 : G \to A$. Dermed er

$$\{\text{ splitudvidelser (3) med triviel } G\text{-virkning på } A\} \longleftrightarrow \{\text{homomorfier } G \to A\}$$

i 1-1 korrespondance. Vi ser nu på det generelle tilfælde hvor virkningen ikke er triviel.

Definition 7.2. Homomorfier $d : G \to A$, som opfylder $d(gg') = dg{+}g.(dg')\ \forall g, g' \in G$ kaldes *derivationer*.

Hvis vi tænker på G som virkende trivielt fra højre, kommer derivationen på formen $d(gh) = (dg).h{+}g.(dh)$, som vi genkender som produktreglen for differentation.

Sætning 7.3. *Der gælder at*

$$\{\ \textit{splitudvidelser (3)}\ \} \longleftrightarrow \{\ \textit{derivationer } G \to A\}$$

er i 1-1 korrespondance.

Bevis. En funktion $s : G \to A \rtimes G$ med $\pi s = \mathrm{id}_G$ har formen $s(g) = (dg, g)$ med $d : G \to A$. Vi vil gerne vise at s er en homomorfi hvis og kun hvis d opfylder $d(gg') = dg + g.(dg')$ for alle $g, g' \in G$. Betragt derfor

$$\begin{aligned} s(g)s(g') &= (dg, g)(dg', g') = (dg + g.(dg'), gg') \\ s(gg') &= (d(gg'), gg') \end{aligned}$$

dermed er $s(g)s(g') = s(gg')$ hvis og kun hvis $d(gg') = dg + g.(dg')$, som ønsket. □

Definition 7.4. To splittings s_1, s_2 siges at være A-*konjugerede,* hvis der findes et $a \in A$, sådan at $s_1(g) = i(a)s_2(g)i(a)^{-1}$ for alle $g \in G$.

Betragt to A-konjugerede splittings $s_1, s_2 : G \to G \rtimes A$, med derivationer d_1 og d_2. I $A \rtimes G$ gælder

$$s_1(g) = (a, 1)(b, g)(a, 1)^{-1} = (a + b, g)(-a, 1) = (a + b - ga, g)$$

så $d_1(g) = a + b - ga$, og da $d_2(g) = b$

$$d_1 g = a + d_2 g - ga$$

Så d_1 og d_2 er derivationer af A-kongugerede splittings hvis og kun hvis $d_2 - d_1 : G \to A$ sender $g \mapsto ga - a$ for et $a \in A$. Vi kalder $d_2 - d_1$ for en *principal derivation.* Hvis vi betragter A-konjugerede splittings som ækvivalente, er A-konjugeringsklasserne af splittings elementer i kvotienten $\mathrm{Der}(G, A)/\mathrm{P}(G, A)$, hvor $\mathrm{Der}(G, A)$ er derivationer, og $\mathrm{P}(G, A)$ er pricipale derivationer.
Vi betragter nu $(\delta^1 f)(g, h) \in C^2(G, A)$, som ved eksempel 6.5 er givet ved

$$(\delta^1 f)(g, h) = gf(h) - f(gh) + f(g)$$

Vi ser at $(\delta^1 f)(g, h) = 0$ hvis og kun hvis $gf(h) - f(gh) + f(g) = 0$ dvs. hvis og kun hvis f er en derivation. Altså er $\mathrm{Ker}\ \delta^1 = \mathrm{Der}(G, A)$.
Betragt nu $\delta^0 : A \to C^1(G, A)$ ved eksempel 6.5. Vi ser at $(\delta^0 a)(g) = ga - a$, så $\mathrm{Im}\ \delta^0 = \mathrm{P}(G, A)$. Vi ser dermed at $\mathrm{Der}(G, A)/\mathrm{P}(G, A) = H^1(G, A)$, og opnår resultatet

Sætning 7.5. *For et G-modul A, er A-kongueringsklasserne af splittings af splitudvidelser*

$$0 \to A \to A \rtimes G \to G \to 1$$

i 1-1 korrespondance med elementerne i $H^1(G, A)$.

7.2 Udvidelser med abelsk kerne

Lad A være et givet G-modul med den givne virkning (2) af G på A, og betragt udvidelsen

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{5}$$

Siden π er surjektiv, kan vi finde en mængdeteoretisk funktion $s : G \to E$ så $\pi s = \mathrm{id}_G$. Denne funktion kalder vi en *sektion* af udvidelsen. Vi antager, at s opfylder *normaliseringsbetingelsen*, dvs. $s(1) = 1$. Vi har behandlet tilfældet, hvor s er en homomorfi i det forrige afsnit. Vi betragter nu det generelle tilfælde, hvor vi indfører funktionen $f : G \times G \to A$, som måler hvor meget s afviger i at være en homomorfi. Lad $g, h \in G$, da vil $s(gh)$ og $s(g)s(h)$ begge blive sendt til $gh \in G$ af π, idet $\pi(s(g)s(h)) =$

$\pi(s(g))\pi(s(h)) = gh$. Da elementer af $i(A)$ ligger i kernen af π, vil $s(g)s(h)$ og $s(hg)$ i E dermed afvige med et element af $i(A)$. Dermed definerer vi f til at opfylde

$$s(g)s(h) = i(f(g,h))s(gh) \quad \text{for alle } g, h \in G$$

Da s er normaliseret, vil $s(g)s(1) = s(g) = i(f(g,1))s(g)$ medføre, at $i(f(g,1)) = 1$, og da i er injektiv vil defor $f(g,1) = 0$. Ligeledes er $f(1,g) = 0$. Så $f(g,1) = 0 = f(1,g)$ for alle $g \in G$. Af forrige afsnit så vi, at $\varphi : A \times G \to E$ givet ved $\varphi((a,g)) = i(a)s(g)$, er en bijektion. Vi finder nu gruppekompositionen i $A \times G$ som gør bijektionen til en isomorfi. Betragt derfor

$$\begin{aligned} i(a)s(g)i(b)s(h) &= i(a)i(g.b)s(g)s(h) \\ &= i(a)i(g.b)i(f(g,h))s(gh) = i(a + g.b + f(g,h))s(gh) \end{aligned}$$

Da vi ønsker, at φ er en homomorfi, ser vi, at gruppekompositionen må være $(a,g)(b,h) = (a + g.b + f(g,h), gh)$. Vi kalder $A \times G$ med denne komposition for E_f.
I E_f er $(0,1)$ er en to-sidet identitet, da

$$\begin{aligned} (a,g)(0,1) &= (a + g.0 + f(g,1), g \cdot 1) = (a,g) \\ (0,1)(a,g) &= (0 + 1.a + f(1,g), 1 \cdot g) = (a,g) \end{aligned}$$

idet f er normaliseret. Lad $(a,g) \in E_f$, da er $(-g^{-1}a - f(g^{-1},g), g^{-1})$ en venstre invers og $(-g^{-1}a - g^{-1}f(g,g^{-1}), g^{-1})$ en højre invers, som ses ved følgende udregninger

$$\begin{aligned} (-g^{-1}a - f(g^{-1},g), g^{-1})(a,g) &= (-g^{-1}a - f(g^{-1},g) + g^{-1}a + f(g^{-1},g), g^{-1}g) \\ &= (0,1) \\ (a,g)(-g^{-1}a - g^{-1}f(g,g^{-1}), g^{-1}) &= (a + g(-g^{-1}a - g^{-1}f(g,g^{-1})) + f(g,g^{-1}), gg^{-1}) \\ &= (0,1) \end{aligned}$$

Vi ser de er lig hinanden af associativitet: kald $g_1 := (-g^{-1}a - f(g^{-1},g), g^{-1})$ og $g_2 := (-g^{-1}a - g^{-1}f(g,g^{-1}), g^{-1})$, da er

$$\begin{aligned} (g_1(a,g))g_2 &= g_2 \\ g_1((a,g)g_2) &= g_1 \end{aligned}$$

Betragt nu

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{i_f} E_f \xrightarrow{\pi_f} G \xrightarrow{1} 1 \tag{6}$$

Vi observerer, at i_f må være den kanoniske inklusionsafbildning givet ved $a \mapsto (a,1)$, da den må være lig $\varphi \circ i$ og $i(a) = i(a)s(1)$. π_f må være den kanoniske projektion $(a,g) \mapsto g$, da den må være lig $\pi \circ \varphi$.Vi ser, at i_f og π_f er homomorfier:

$$\begin{aligned} i_f(a+b) &= (a+b,1) \\ i_f(a)i_f(b) &= (a,1)(b,1) = (a + b + f(1,1), 1) = (a+b,1) \\ \pi_f((a,g)(b,h)) &= \pi_f((a + b.g + f(g,h), gh) = gh \\ \pi_f(a,g)\pi_f(b,h) &= gh \end{aligned}$$

Vi viser nu, at følgen er eksakt. Billedet af nulafbildningen er 0 og $i_f(0) = (0,1)$, som er neutralelementet i E_f. Billedet af et element $a \in A$ under i_f er $(a,1)$ og $\pi_f(a,1) = 1$, som er neutralelementet i G. Idet alle elementer i G bliver sendt i 1, gør billedet af π_f det specielt. Lad $a \in \text{Ker } i_f$, da er $(a,1) = (0,1)$, så $a = 0$, som

ligger i billedet af nulafbildningen. Lad $(a, g) \in \text{Ker } \pi_f$ så er $\pi_f(a, g) = g = 1$, så $(a, g) = (a, 1)$, som er billedet af a under i_f. Så følgen er eksakt.
Vi checker, at udvidelsen (6) giver den givne virkning af G på A. Vi ønsker altså at vise, at $(ga, 1) = (a, g)(a, 1)(a, g)^{-1}$, vi ser, at

$$\begin{aligned}
(a, g)(a, 1) &= (a + ga + f(g, 1), g) = (a + ga, g) \\
(a + ga, g)(-g^{-1}a - g^{-1}(g, g^{-1}), g^{-1}) &= (a + ga - gg^{-1}a - gg^{-1}f(g, g^{-1}) \\
&\quad + f(g, g^{-1}), gg^{-1}) \\
&= (ga, 1)
\end{aligned}$$

Denne udvidelse er altså ækvivalent med den oprindelige udvidelse (5), og er kun givet ved grupperne A, G og funktionen f.
Vi ser, at f er den, til den kanoniske sektion $s_f : G \to E_f$, givet ved $s_f(g) = (0, g)$, associerede funktion, idet

$$\begin{aligned}
s_f(g)s_f(h) &= (0, g)(0, h) = (f(g, h), gh) \\
i_f(f(g, h))s_f(gh) &= (f(g, h), 1)(0, gh) = (f(g, h), gh)
\end{aligned}$$

Spørgsmålet er, om man kan starte med grupper G og A, samt en tilfældig funktion $f : G \times G \to A$, som er normaliseret og definerer en gruppe E_f til $A \times G$ med komposition $(a, g)(b, h) = (a + bg + f(g, h), gh)$. Det viser sig, at hvis E_f skal være en gruppe, må f ydeligere opfylde at

$$f(g, h) + f(gh, k) = gf(h, k) + f(g, hk) \quad \text{for alle } g, h, k \in G \tag{7}$$

for at opfylde associativitet. Det ses ved følgende udregning:

$$\begin{aligned}
((a, g)(b, h))(c, k) &= (a + gb + f(g, h), gh)(c, k) \\
&= (a + gb + f(g, h) + ghc + f(gh, k), ghk) \\
(a, g)((b, h)(c, k)) &= (a, g)(b + hc + f(h, k), hk) \\
&= (a + g(b + hc + f(h, k)) + f(g, hk), ghk)
\end{aligned}$$

Vi har dermed opnået en 1-1 korrespondance

$$\begin{gathered}
\{ \text{ udvidelser (5) med en normaliseret sektion } \} \\
\updownarrow \\
\{ \text{ normaliserede } f : G \times G \to A \text{ som opfylder (7) } \}
\end{gathered}$$

Hvis vi omskriver $f(g, h) + f(gh, k) = gf(h, k) + f(g, hk)$ til

$$gf(h, k) - f(gh, k) + f(g, hk) - f(g, h) = 0$$

ser vi af Eksempel 6.3, at f er et element i $Z^2(C^*(G, A))$. Da f endvidere er normaliseret, altså at $f(1, g) = 0 = f(g, 1)$, er f i det normaliserede standard kokædekompleks, som vi betegner $C^*_N(G, A)$. Vi har nu opnået en 1-1 korrespondance

$$\begin{gathered}
\{ \text{ udvidelser (5) med en normaliseret sektion } \} \\
\updownarrow \\
\{ \text{ normaliserede 2-cocycles af } G \text{ med koefficienter i } A \}
\end{gathered}$$

Vi ser nu, hvad der sker, hvis vi vælger s i den originale udvidelse (5) anderledes. En tilfældig normaliseret s' af udvidelsen (5), er givet ved, at den sender $g \mapsto i(c(g))s(g)$, hvor s er vores oprindelige sektion, idet $i(c(g)) \mapsto 0$ af π og dermed $\pi(i(c(g))s(g)) = \pi(s(g)) = g$. $c : G \to A$ er en funktion, som opfylder $c(1) = 0$, da det er et krav at $i(c(1))s(1) = 1$. Det vil med andre ord sige, at c er et element i $C^1_N(G, A)$. Den nye funktion $f_{s'}$, til det nye valg af sektion s', kan vi udregne ved hjælp af

$$\begin{aligned} i(c(g))s(g)i(c(h))s(h) &= i(c(g))i(gc(h))s(g)s(h) \\ &= i(c(g) + gc(h))i(f(g, h))s(gh) \\ &= i(c(g) + gc(h) + f(g, h) - c(gh))i(c(gh))s(gh) \end{aligned}$$

hvor f er den oprindelige funktion. Dermed er den nye funktion $f_{s'}$ givet ved

$$f_{s'}(g, h) = c(g) + gc(h) + f(g, h) - c(gh)$$

Vi ser at $f_{s'}$ er lig $f + \delta^1 c$, hvor $\delta^1 : C^1(G, A) \to C^2(G, A)$ af Eksempel 6.3 er givet ved $(\delta c)(g, h) = gc(h) - c(gh) + c(g)$. Så f og $f + \delta^1 c$ er ækvivalente i Ker δ^2/Im δ^1. Hvis vi altså ikke tager højde for valg af sektion, opnår vi en 1-1 korrespondance

$$\begin{gathered} \{\text{ udvidelser (5) }\} \\ \updownarrow \\ \{\text{elementer i Ker } \delta^2/\text{Im } \delta^1\} \end{gathered}$$

Vi har dermed bevist

Sætning 7.6. *Lad A være et G-modul og lad $\mathcal{E}(G, A)$ betegne mængden af ækvivalensklasser af udvidelser af G ved A med den givede virkning af G på A. Da er*

$$\mathcal{E}(G, A) \simeq H^2(G, A)$$

8 p-grupper med en cyklisk undergruppe af orden p

I det følgende vil vi via gruppeudvidelser give en klassifikation af p-grupper med en cyklisk undergruppe af index p, hvor p er et primtal. Vi bruger notationen $\mathbb{Z}_q := \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ for $q \in \mathbb{N}$.
Vi beviser først følgende lemma:

Lemma 8.1. *Lad $a \in \mathbb{Z}$ opfylde $a^p \equiv 1 \mod p^n$ for et $n \geq 2$. Hvis p er ulige er $a \equiv 1 \mod p^{n-1}$ og hvis $p = 2$ er $a \equiv \pm 1 \mod 2^{n-1}$.*

Bevis. Antag, at $a \neq 1$, idet lemmaet gælder for $a = 1$. Lad $d = d(a)$ være det største hele tal, sådan at $a \equiv 1 \mod p^d$. Af Fermat's lille sætning har vi, at $a \equiv a^p \mod p$, og af antagelsen er $a^p \equiv 1 \mod p$, så $d(a) \geq 1$.

Vi viser, at der gælder at $d(a^p) = d(a) + 1$. Vi skriver $a = 1 + kp^d$ med $k \neq 0$, da vi pr. antagelse har, at $a \neq 1$. Betragt $a^p = (1 + kp^d)^p$, det er af binomialformlen givet ved

$$\begin{aligned} (1 + kp^d)^p = \sum_{i=0}^{p} \frac{p!}{i!(p-i)!}(kp^d)^{p-i} &= (kp^d)^p + p(kp^d)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}(kp^d)^{p-2} + \\ \dots &+ \frac{p(p-1)}{2}(kp^d)^2 + p(kp^d) + 1 \\ &= k^p p^{dp} + k^{p-1}p^{d(p-1)+1} + \frac{(p-1)}{2}k^{p-2}p^{d(p-2)+1} \\ \dots &+ \frac{(p-1)}{2}k^2 p^{2d+1} + (kp^{d+1}) + 1 \end{aligned}$$

Vi ser, at $p^{d+1} \mid (1+kp^d)^p - 1$, hvis $dp \geq 1+d$, hvilket altid gælder da $d \geq 1$.
Vi opnår, at $a^p \equiv 1 \mod p^{d(a)+1}$, dermed $d(a) \geq n-1$, som ønsket. Hvis $p = 2$ og $d = 1$, er $a \equiv -1 \mod 4$, dvs. $-a \equiv 1 \mod 4$. Så $d(a^2) = d(-a) + 1$ af samme argumenter som før, så $d(-a) \geq n-1$ hvilket vil sige at $-a \equiv 1 \mod 2^{n-1}$. □

Sætning 8.2. *Hvis G er en p-gruppe med en cyklisk undergruppe af index p, så er G isomorf til en af følgende grupper*

(i) $\mathbb{Z}_q$, *hvor* $q = p^n$ *med* $n \geq 1$.

(ii) $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$, *hvor* $q = p^n$ *med* $n \geq 1$.

(iii) $\mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_q$, *hvor* $q = p^n$ *og* $n \geq 2$, *og hvor frembringeren af* $\mathbb{Z}_p$ *virker på* $\mathbb{Z}_q$ *som multiplikation med* $1 + p^{n-1}$, *hvilket giver mening, da* $(1+p^{n-1})^p \equiv 1\ (p^n)$ *af binomialformlen.*

(iv) Dieder-2-grupper: $D_{2m} := \mathbb{Z}_m \rtimes \mathbb{Z}_2$ *for* $m = 2^n$ *for* $n \geq 1$, *hvor frembringeren af* $\mathbb{Z}_2$ *virker på* $\mathbb{Z}_m$ *som multiplikation med* -1.

(v) Generaliserede kvaternion 2-grupper. Lad $\mathbb{H}$ *være kvaternionsalgebraen* $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$. *Lad* $m = 2^n$ *for* $n \geq 1$, *da er den generaliserede kvaternionsgruppe* Q_{4m} *defineret til at være undergruppen af* $\mathbb{H}^*$ *frembragt af* $x = e^{\pi i/m}$ *og* $y = j$. $\mathbb{Z}_2$*'s frembringeren virker som multiplikation med* -1 *på* Q_{4m}.

(vi) $\mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_2$, *hvor* $q = 2^n$ *og* $n \geq 3$, *hvor frembringeren af* $\mathbb{Z}_2$ *virker på* $\mathbb{Z}_q$ *som multiplikation med* $-1 + 2^{n-1}$.

Bevis. Vi betragter gruppeudvidelsen

$$0 \to \mathbb{Z}_q \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \to 1 \tag{8}$$

hvor $H = G/\mathbb{Z}_q$, $q = p^n$ for $n \geq 1$ og $|H| = p$. i er inklusionen, π er homomorfien som sender et $g \in G$ ind i sin restklasse modulo $\mathbb{Z}_q$. Vi skal bestemme udvidelserne af H ved $\mathbb{Z}_q$ op til ækvivalens.
Der er to muligheder for virkningen af H på $\mathbb{Z}_q$; den kan være triviel eller ikke-triviel. Betragt først tilfældet hvor H virker trivielt på $\mathbb{Z}_q$. Hvis z er frembringeren fra $\mathbb{Z}_q$ og h er frembringeren af H er G frembragt af $i(z)$ og g, hvor g er et element i G, som opfylder $\pi(g) = h$. Idet virkningen af H på $\mathbb{Z}_q$ er triviel, opnår vi $i(z) = i(h.z) = gi(z)g$, så $i(z)$ og g kommuterer. Da G er frembragt af to kommuterende elementer, er G abelsk. Af gruppeteori for endelige abelske grupper følger, at G er isomorf med *(i)* eller *(ii)*.
Antag nu, at H virker ikke-trivielt på $\mathbb{Z}_q$, da svarer virkningen til en ikke-triviel homomorfi $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_q)$. Vi har, at $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_q)$ er isomorf med $\mathbb{Z}_q^*$, som er gruppen af enheder i ringen $\mathbb{Z}_q$. Da $|H| = p$ og homomorfien er ikke-triviel, er $\mathrm{Ker}\ \varphi = 1$, idet $\mathrm{Ker}\ \varphi \neq H$ skal være en undergruppe af H. Så φ er injektiv, og dermed er φ en indlejring $H \hookrightarrow \mathbb{Z}_q^*$. Vi ønsker at udregne $H^2(H, \mathbb{Z}_q)$, idet $H^2(H, \mathbb{Z}_q)$ er i 1-1 korrespondance til ækvivlensklasser af udvidelser (8), jvf. Sætning 7.6. Vi benytter Eksempel 6.4, dvs.

$$H^2(H, \mathbb{Z}_q) = \mathbb{Z}_q^H / \mathrm{Im}\ N$$

hvor N er norm operatoren, dvs. multiplikation med $N = \sum_{h \in H} h$.
Antag p er ulige. Tag et element $a \in \mathrm{Im}\ \varphi$. Da $|\mathrm{Im}\ \varphi| = p$, og $\mathrm{Im}\ \varphi$ er en undergruppe af $\mathbb{Z}_q^*$ i ringen $\mathbb{Z}_q$, må der gælde, at $a^p \equiv 1 \mod p^n$. Af Lemma 8.1 følger dermed

$a \equiv 1 \mod p^{n-1}$. Så billedet er givet ved Im $\varphi = \{1 + b \,|\, b \in p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}$. Im φ er frembragt af $1 + p^{n-1}$ idet vi af binomialformlen har for $k \in \mathbb{N}$, at

$$(1 + p^{n-1})^k = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}(p^{n-1})^i \equiv 1 + kp^{n-1} \mod p^n$$

da $p^n \,|\, (p^{n-1})^i$ for $i \geq 2$, idet $n \geq 2$.
H's frembringer, må derfor virke på $\mathbb{Z}_q$ som multiplikation med $1+p^{n-1}$, som i tilfælde (iii). Vi finder $\mathbb{Z}_q^H$ til at være

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_q^H &= \{z \in \mathbb{Z}_q \,|\, \text{for } i = 1, \dots, p : \ (1 + p^{n-1})^i z = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{Z}_q \,|\, \text{for } i = 1, \dots, p : \ (1 + ip^{n-1})z = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{Z}_q \,|\, p^{n-1}z = 0\} = p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Norm operatoren er multiplikation med $\sum_{h \in H} h = \sum(1 + b)$ for $b \in p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Summen er over p elementer af formen $1+b$ hvoraf $\sum b = (1+\ldots+p)p^{n-1} = mpp^{n-1}$ idet p er ulige, og $mp^n \equiv 0 \mod p^n$. Så normoperatoren er multiplikation med p og dermed er billedet Im $N = p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Vi opnår

$$H^2(H, \mathbb{Z}_q) = 0$$

dvs. udvidelsen splittes og dermed er G, af Sætning 7.1, isomorf med (iii).
Antag nu, at $p = 2$, så $q = 2^n$ og $|H| = 2$. Af lemmaet er indlejringen nu billedet $\{\pm 1 + b \,|\, b \in 2^{n-1}\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\}$. Vi ser på tre muligheder for billedet a af frembringeren for H.

Tilfælde 1: $a = -1$.
Her er

$$\mathbb{Z}_q^H = \{z \in \mathbb{Z}_q \,|\, (-1)z = z\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

og normoperatoren er

$$N = -1 + (-1)^2 = 0$$

Så vi får dermed $H^2(H, \mathbb{Z}_q) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Det vil sige, at der eksisterer netop to udvidelser af H ved $\mathbb{Z}_q$, som ikke er ækvivalente. Da vi har givet to i (iv) og (v) med disse egenskaber, følger det, at H er isomorf med (iv) eller (v).

Tilfælde 2: $a = 1 + 2^{n-1}$. Hvis $n = 2$ er $1 + 2^{2-1} = 3 \equiv -1 \mod 4$, og vi er i tilfælde (1). Antag derfor $n \geq 3$. Vi har

$$\mathbb{Z}_q^H = \{z \in \mathbb{Z}_q \,|\, (1 + 2^{n-1})z = z\} = 2\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$$

idet $(1 + 2^{n-1})^2 \equiv 1 \mod 2^n$. Normoperatoren er multiplikation med

$$N = 1 + 2^{n-1} + (1 + 2^{n-1})^2 \equiv 2 + 2^{n-1} = 2(1 + 2^{n-2}) \mod 2^n$$

$1 + 2^{n-2}$ er en enhed i ringen $\mathbb{Z}_q$, for antag $2 \,|\, (1 + 2^{n-2})$, da er $1 + 2^{n-2} = k2$ for et $k \in \mathbb{Z}$, hvilket er en modstrid for $n \geq 3$. Så billedet af N er $2\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Dermed er $H^2(H, \mathbb{Z}_q) = 0$, så udvidelsen splittes, og G er isomorf med (iii).

Tilfælde 3: $a = -1 + 2^{n-1}$.
Idet vi for $n = 2$ har $-1 + 2^{2-1} = -1 + 2 = 1$ antager vi $n \geq 3$. Vi har at

$$\mathbb{Z}_q^H = \{z \in \mathbb{Z}_q \,|\, (-1 + 2^{n-1})z = z\} = 2^{n-1}\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$$

idet $(-1+2^{n-1})^2 = 1+2^{2(n-1)} - 2^n \equiv 1 \mod 2^n$. Normoperatoren er multiplikation med $N = -1 + 2^{n-1} + (-1+2^{n-1})^2 \equiv 2^{n-1} \mod 2^n$, så billedet er $2^{n-1}\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Vi har dermed at $H^2(H, \mathbb{Z}_q) = 0$ og udvidelsen splittes. G er dermed isomorf med (vi).

□

9 Litteraturliste

- Brown, Kenneth S. *Cohomology of Groups*. Graduate texts in mathematics; 87. Springer-Verlag New York Inc. 1982.
- Hilton, Peter J. Stammbach, Urs. *A Course in Homological Algebra. Second Edition*. Graduate text in mathematics; 4. Springer-Verlag New York Inc. 1997.